512.22
B91u

Return this book on or before the
Latest Date stamped below.

University of Illinois Library

FEB 15 1963

L161—H41

LIBRARY
UNIVERSITY OF ILLINOIS
URBANA

Über die gruppentheoretische definierende Relation

$$TS = S^k T^l.$$

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung der Doktorwürde der Hohen Philosophischen Fakultät der Universität Leipzig

vorgelegt von

Martin Hermann Georg **Felix Burkhardt**

aus **Herwigsdorf** bei Löbau.

Weida i. Thür.
Druck von Thomas & Hubert
Spezialdruckerei für Dissertationen
1917.

Angenommen von der III. Sektion auf Grund der Gutachten der Herren

Hölder und **Herglotz.**

Leipzig, den 21. Dezember 1916.

Der Prokanzellar
Kromayer.

32
512.861
B91u

Meinen lieben Eltern

in Dankbarkeit gewidmet.

1. Abschnitt.

Die Methode des statarischen Substituierens.

§ 1. Die Methode des linksseitigen statarischen Substituierens.

In den gruppentheoretischen Studien vom Jahre 1882 geht W. Dyck von gewissen erzeugenden Operationen A_1, A_2, A_3 ... aus, die rein formal ohne irgendwelchen speziellen Charakter gedacht werden. Die Verbindung dieser Operationen erfolgt nach dem assoziativen, dagegen nicht nach dem kommutativen Gesetz. Dabei sind gewisse Multiplikationsregeln in Form von Gleichungen zwischen den erzeugenden Operationen, die als definierende Relationen bezeichnet werden, gegeben. Die Gesamtheit der sämtlichen verschiedenen symbolischen Produkte, die auf Grund der definierenden Relationen aus den erzeugenden Operationen hergestellt werden können, bildet eine Gruppe.

In der vorliegenden Arbeit gehen wir von zwei erzeugenden Operationen aus, die wir mit S und T bezeichnen. Wir setzen die Komposition der Operation S mit den Potenzen der Operation T und die Komposition der Operation T mit den Potenzen der Operation S als nicht kommutativ voraus. Als definierende Relationen wählen wir die Gleichungen

$$S^\sigma = 1, \qquad T^\tau = 1, \qquad TS = S^k T^l.$$

Die durch die speziellen Gleichungen dieser Art

$$S''^{\sigma''} = 1, \qquad T''^{\tau''} = 1, \qquad T''S'' = S''^{\varkappa} T''$$

$$S'''^{\sigma'''} = 1, \qquad T'''^{\tau'''} = 1, \qquad T'''S''' = S'''T'''^{\lambda}$$

definierten Gruppen sind von Herrn Geheimrat Hölder bereits untersucht worden. Für eine weitere Gruppe, die durch die speziellen Gleichungen

$$S'^{\sigma'} = 1, \qquad T'^{\tau'} = 1, \qquad T'S' = S'^{3}T'^{2}$$

definiert ist, hat Herr Geheimrat Hölder folgenden Satz gefunden: Ist a die Ordnungszahl der Operation $S'T'^{2}$, so ist $S'^{3a} = 1$. Herr Geheimrat Hölder leitet diesen Satz folgendermaßen ab. Aus der definierenden Relation

(1) $$T'S' = S'^{3}T'^{2}$$

folgt durch Multiplikation beider Seiten mit sich selbst

$$T'S'T'S' = S'^{3}T'^{2}S'^{3}T'^{2}.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung wird auf die Form

$$T'S'T'S' = S'^{3}T'(T'S')S'^{2}T'^{2}$$

gebracht. Durch Einsetzen der Operation $S'^{3}T'^{2}$ für die in Klammern stehende Operation $T'S'$ wird dieser Ausdruck in die Form

$$T'S'T'S' = S'^{3}T'S'^{3}T'^{2}S'^{2}T'^{2}$$

überführt. Dieser Ausdruck wird wiederum auf die Form

$$T'S'T'S' = S'^{3}(T'S')S'^{2}T'^{2}S'^{2}T'^{2}$$

gebracht. Durch Einsetzen der Operation $S'^{3}T'^{2}$ zum zweiten Male für die in Klammern stehende Operation $T'S'$ geht dieser Ausdruck über in die Form

$$T'S'T'S' = S'^{3}S'^{3}T'^{2}S'^{2}T'^{2}S'^{2}T'^{2}.$$

Substituieren wir in dieser Weise weiter, so entstehen folgende Ausdrücke

$$\begin{aligned} T'S'T'S' &= S'^{6}T'(T'S')S'T'^{2}S'^{2}T'^{2} \\ &= S'^{6}T'S'^{3}T'^{2}S'T'^{2}S'^{2}T'^{2} \\ &= S'^{6}(T'S')S'^{2}T'^{2}S'T'^{2}S'^{2}T'^{2} \\ &= S'^{9}T'^{2}S'^{2}T'^{2}S'T'^{2}S'^{2}T'^{2} \\ &= S'^{9}T'(T'S')S'T'^{2}S'T'^{2}S'^{2}T'^{2} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
T'S'T'S' &= S'^{9}T'S'^{3}T'^{2}S'T'^{2}S'T'^{2}S'^{2}T'^{2} \\
&= S'^{9}(T'S')S'^{2}T'^{2}S'T'^{2}S'T'^{2}S'^{2}T'^{2} \\
&= S'^{12}T'^{2}S'^{2}T'^{2}S'T'^{2}S'T'^{2}S'^{2}T'^{2} \\
&= S'^{12}T'(T'S')S'T'^{2}S'T'^{2}S'T'^{2}S'^{2}T'^{2} \\
&= S'^{12}T'S'^{2}(S'T'^{2})^{4}S'^{2}T'^{2} \\
&= S'^{12}(T'S')S'(S'T'^{2})^{4}S'^{2}T'^{2} \\
&= S'^{15}T'^{2}S'(S'T'^{2})^{4}S'^{2}T'^{2} \\
&= S'^{15}T'(T'S')(S'T^{2})^{4}S'^{2}T'^{2} \\
&= S'^{15}T'S'^{2}(S'T'^{2})^{5}S'^{2}T'^{2}.
\end{aligned}
$$

Nach $2n-1$ Substitutionen erhalten wir die Gleichung:

$$T'S'T'S' = S'^{3n}T'S'^{2}(S'T'^{2})^{n}S'^{2}T'^{2}. \tag{2}$$

Setzen wir für n der Reihe nach die Werte

$$a,\ 2a,\ 3a \ldots,$$

wobei zunächst a eine beliebige positive ganze Zahl bedeuten soll, so erhalten wir durch Gleichsetzen der rechten Seiten der entstehenden einzelnen Gleichungen folgende fortlaufende Gleichung:

$$
\begin{aligned}
S'^{3a}T'S'^{2}(S'T'^{2})^{a}S'^{2}T'^{2} &= S'^{6a}T'S'^{2}(S'T'^{2})^{2a}S'^{2}T'^{2} = \\
&= S'^{9a}T'S'^{2}(S'T'^{2})^{3a}S'^{2}T'^{2} = \ldots
\end{aligned} \tag{3}
$$

Nehmen wir nun an, a ist die Ordnungszahl der Operation $S'T'^{2}$, sodaß also

$$(S'T'^{2})^{a} = (S'T'^{2})^{2a} = (S'T'^{2})^{3a} \ldots = 1 \tag{4}$$

ist, so geht die fortlaufende Gleichung (3) über in

$$S'^{3a}T'S'^{2}S'^{2}T'^{2} = S'^{6a}T'S'^{2}S'^{2}T'^{2} = S'^{9a}T'S'^{2}S'^{2}T'^{2} = \ldots \tag{5}$$

Durch Multiplikation dieser Gleichungen rechts mit $(T'S'^{2}S'^{2}T'^{2})^{-1}$ erhalten wir die Gleichungen

$$S'^{3a} = S'^{6a} = S'^{9a} = \ldots\ldots \tag{6}$$

Aus der Gleichung

$$S'^{3a} = S'^{6a}$$

folgt durch Multiplikation mit S^{-3a} die Gleichung:

$$S'^{3a} = 1. \tag{7}$$

Ebenso erhalten wir aus den andern Teilgleichungen durch geeignete Multiplikation mit S^{-6a}, S^{-9a} . . . dieselbe Gleichung

$$S'^{3a} = 1.$$

Diese Gleichung schreiben wir in der Form

$$(S'^{3})^{a} = 1. \tag{7a}$$

Auf Grund der letzten Gleichung können wir jetzt folgenden Satz aussprechen:

Satz I: Ist a die Ordnungszahl der Operation $S'T'^{2}$, so ist die $a$te Potenz der Operation S'^{3} gleich 1.

Auch die Umkehrung dieses Satzes läßt sich leicht erweisen. Zu diesem Ende nehmen wir an, daß die positive ganze Zahl a in der fortlaufenden Gleichung (3) die Ordnungszahl der Operation S'^{3} bedeute; sodaß also

$$S'^{3a} = S'^{6a} = S'^{9a} = \ldots = 1$$

ist. Dann geht die fortlaufende Gleichung (3) über in

$$\begin{aligned} T'S'^{2}(S'T'^{2})^{a}S'^{2}T'^{2} &= T'S'^{2}(S'T'^{2})^{2a}S'^{2}T'^{2} \\ &= T'S'^{2}(S'T'^{2})^{3a}S'^{2}T'^{2} = \ldots \end{aligned} \tag{8}$$

Durch Multiplikation links bez. rechts mit $(T'S'^{2})^{-1}$ bez. $(S'^{2}T'^{2})^{-1}$ erhalten wir

$$(S'T'^{2})^{a} = (S'T'^{2})^{2a} = (S'T'^{2})^{3a} = \ldots$$

Aus der Gleichung $$(S'T'^{2})^{a} = (S'T'^{2})^{2a}$$

folgt nach Multiplikation mit $(S'T'^{2})^{-a}$

$$1 = (S'T'^{2})^{a}. \tag{9}$$

Ebenso finden wir aus den übrigen Teilgleichungen durch geeignete Multiplikation dieselbe Gleichung

$$1 = (S'T'^{2})^{a}.$$

Wir finden also jetzt als Umkehrung des vorigen Satzes den folgenden Satz:

Satz II: Ist a die Ordnungszahl der Operation S'^{3}, so ist die $a$te Potenz der Operation $S'T'^{2}$ gleich 1.

Aus beiden Sätzen I und II ergibt sich die Beziehung zwischen den Ordnungszahlen der Operationen S'^3 und $S'T'^2$, die folgendermaßen lautet:

Satz III: Ist a die Ordnungszahl der Operation $S'T'^2$, so hat die Operation S'^3 ebenfalls die Ordnung a.

Dieser Satz bedarf noch einer Begründung. Setzen wir a als Ordnungszahl der Operation $S'T'^2$ voraus, so lassen Gleichung (7 a) und Satz I noch die Möglichkeit offen, daß a ein Vielfaches der Ordnungszahl der Operation S'^3 ist. Mit Hilfe von Gleichung (9) und Satz II können wir aber beweisen, daß dieser Fall niemals eintreten kann. Denn nehmen wir an, daß a nicht gleich der Ordnungszahl der Operation S'^3 sein würde, sondern gleich einem Vielfachen derselben, etwa gleich dem ν-fachen, so würde $\frac{a}{\nu}$ die Ordnungszahl der Operation S'^3 sein. Ist aber $\frac{a}{\nu}$ die Ordnungszahl der Operation S'^3, so folgt aus Satz II, daß die $\frac{a}{\nu}$-te Potenz der Operation $S'T'^2$ gleich 1 sein müßte. Dies ist aber nicht möglich, da nach Voraussetzung die Ordnung der Operation $S'T'^2$ gleich a ist und keine Potenz einer Operation mit einem Exponent, der kleiner ist als die Ordnungszahl, gleich 1 sein kann; denn sonst wäre ja der kleinere Exponent die Ordnungszahl der Operation. Es kann also a kein Vielfaches der Ordnungszahl der Operation S'^3 sein, sondern muß gleich der Ordnungszahl selbst sein.

Ebenso begründen wir die Umkehrung des Satzes III, die folgendermaßen lautet:

Satz IV: Ist a die Ordnungszahl der Operation S'^3, so hat die Operation $S'T'^2$ ebenfalls die Ordnung a.

Satz II läßt wiederum noch die Möglichkeit offen, daß a ein Vielfaches der Ordnungszahl der Operation $S'T'^2$ ist. Mit Hilfe des Satzes I können wir aber analog wie oben zeigen, daß diese Annahme auf einen Widerspruch führt.

Die beiden Sätze III und IV lassen sich in den folgenden Satz zusammenziehen:

Satz V: Die beiden Operationen S'^3 und $S'T'^2$ haben gleiche Ordnung.

Aus den Sätzen III, IV und V ergeben sich für die Ordnungszahlen der Operationen S' und $S'T'^2$ folgende Beziehungen:

Satz VI: Hat die Operation $S'T'^2$ die Ordnung a und ist a durch 3 teilbar, so hat die Operation S' die Ordnung $3a$. Ist a nicht durch 3 teilbar, so kann die Operation S' sowohl die Ordnung a, als auch die Ordnung $3a$ haben.

Die Umkehrung dieses Satzes lautet:

Satz VIa: Ist a die Ordnungszahl der Operation S', so hat die Operation $S'T'^2$ die Ordnung $\frac{a}{3}$ bez. a, je nachdem a durch 3 oder nicht durch 3 teilbar ist. M. a W. die Operation $S'T'^2$ hat die Ordnung $\frac{a}{[a, 3]}$[1]).

Die zur Herleitung der Gleichung (2) angewandte Methode wollen wir zur Unterscheidung von später anzuwendenden Methoden als Methode des linksseitigen statarischen Substituierens bezeichnen. Das Wesentliche dieser Methode besteht darin, daß die rechte Seite der durch Multiplikation der definierenden Relation $T'S' = S'^3T'^2$ mit sich selbst entstehenden Gleichung $T'S'T'S' = S'^3T'^2S'^3T'^2$ als Ausgangsoperation zugrunde gelegt und für die erste Operation $T'S'$ jedesmal die Operation $S'^3T'^2$ substituiert wird.

Die Anwendnung der Methode des linksseitigen statarischen Substituierens auf die durch die allgemeinen Gleichungen

$$\begin{aligned} TS &= S^k T^l \\ S^\sigma &= 1 \\ T^\tau &= 1 \end{aligned} \tag{10}$$

definierte Gruppe gestaltet sich analog. Wir wählen die Operation

$$S^k T^l S^k T^l$$

als Ausgangsoperation und substituieren in ihr jedesmal für die erste Operation TS die Operation $S^k T^l$. Wir erhalten:

---

[1]) Das Symbol $[a, 3]$ bedeutet den größten gemeinsamen Faktor von a und 3.

$$
\begin{aligned}
TSTS &= S^k T^l S^k T^l \\
&= S^k T^{l-1}(TS) S^{k-1} T^l \\
&= S^k T^{l-1} S^k T^l S^{k-1} T^l \\
&= S^k T^{l-2}(TS) S^{k-1} T^l S^{k-1} T^l \\
&= S^k T^{l-2} S^k T^l S^{k-1} T^l S^{k-1} T^l \\
&= S^k T^{l-3}(TS) S^{k-1} T^l S^{k-1} T^l S^{k-1} T^l \\
&= S^k T^{l-3} S^k T^l (S^{k-1} T^l)^2 S^{k-1} T^l.
\end{aligned}
$$

Nach $l-1$ Substitutionen erhalten wir den Ausdruck:

$$
\begin{aligned}
TSTS &= S^k TS^2 S^{k-2} T^l (S^{k-1} T^l)^{l-2} S^{k-1} T^l \\
&= S^k (TS) S S^{k-2} T^l (S^{k-1} T^l)^{l-2} S^{k-1} T^l \\
&= S^{2k} T^l S S^{k-2} T^l (S^{k-1} T^l)^{l-2} S^{k-1} T^l \\
&= S^{2k} T^{l-1} (TS) S^{k-2} T^l (S^{k-1} T^l)^{l-2} S^{k-1} T^l \\
&= S^{2k} T^{l-1} S^k T^l S^{k-2} T^l (S^{k-1} T^l)^{l-2} S^{k-1} T^l \\
&= S^{2k} T^{l-2} (TS) S^{k-1} T^l S^{k-2} T^l (S^{k-1} T^l)^{l-2} S^{k-1} T^l \\
&= S^{2k} T^{l-2} S^k T^l S^{k-1} T^l S^{k-2} T^l (S^{k-1} T^l)^{l-2} S^{k-1} T^l \\
&= S^{2k} T^{l-3} (TS) S^{k-1} T^l S^{k-1} T^l S^{k-2} T^l (S^{k-1} T^l)^{l-2} S^{k-1} T^l \\
&= S^{2k} T^{l-3} S^k T^l S^{k-1} T^l S^{k-1} T^l S^{k-2} T^l (S^{k-1} T^l)^{l-2} S^{k-1} T^l.
\end{aligned}
$$

Nach $2l-1$ Substitutionen erhalten wir

$$= S^{2k} TS^2 [S^{k-2} T^l (S^{k-1} T^l)^{l-2}]^2 S^{k-1} T^l.$$

Nach $nl-1$ Substitutionen erhalten wir

$$TSTS = S^{nk} TS^2 [S^{k-2} T^l (S^{k-1} T^l)^{l-2}]^n S^{k-1} T^l. \qquad (11)$$

Aus Gleichung (11) folgt nach analogen Überlegungen wie früher

Satz VII: Ist a die Ordnungszahl der Operation $S^{k-2} T^l (S^{k-1} T^l)^{l-2}$, so ist die $a$te Potenz der Operation S^k gleich 1.

Satz VIII: Ist a die Ordnungszahl der Operation S^k, so ist die $a$te Potenz der Operation $S^{k-2} T^l (S^{k-1} T^l)^{l-2}$ gleich 1.

Aus beiden Sätzen folgt:

Satz IX: Die beiden Operationen S^k und $S^{k-2} T^l (S^{k-1} T^l)^{l-2}$ haben gleiche Ordnung.

Für die Ordnungszahlen der Operationen S und $S^{k-2}T^l(S^{k-1}T^l)^{l-2}$ ergeben sich die folgenden Beziehungen:

Satz X: Ist a die Ordnung der Operation $S^{k-2}T^l(S^{k-1}T^l)^{l-2}$, so hat die Operation S die Ordnung a', wobei a' ein Vielfaches, das zwischen dem 1-fachen und dem k-fachen liegt, von a ist und der Relation $\frac{a'}{[a', k]} = a$ gehorcht.

Ebenso läßt sich aus Gleichung (11) auch die Umkehrung herleiten:

Satz Xa: Ist a die Ordnung der Operation S, so ist $\frac{a}{[a, k]}$ die Ordnung der Operation $S^{k-2}T^l(S^{k-1}T^l)^{l-2}$.

Die Gleichung (11) geht in die entsprechenden Gleichungen der durch spezielle Gleichungen dieser Art definierten Gruppen über, wenn wir in ihr für k und l die speziellen Werte einsetzen. Ebenso erhalten wir aus dem Ausdruck $ln-1$ für die Anzahl der Substitutionen die entsprechende Zahl bei den durch spezielle definierende Relationen bestimmten Gruppen, wenn wir für l den Exponent der Operation T in der betreffenden speziellen definierenden Relation setzen. Daß der Ausdruck für die Anzahl der Substitutionen, die bis zur n-Gleichung gemacht werden, eine Funktion vom Exponent der Operation T in der definierenden Relation ist und vom Exponent der Operation S nicht abhängt, leuchtet ohne weiteres ein.

§ 2. Herleitung der Ergebnisse des § 1 durch Transformieren der definierenden Relation.

Die in § 1 mittels der Methode des linksseitigen statarischen Substituierens gefundenen Resultate können auch auf anderem Wege durch Vornahme gewisser Transformationen aus den definierenden Relationen hergeleitet werden. Dazu bedürfen wir einiger Hilfssätze. Wir bezeichnen mit α und β zwei Operationen und nehmen an, daß die aus ihnen gebildete Operation $\alpha\beta$ die Ordnung ν hat, sodaß also

$$(\alpha\beta)^\nu = 1$$

ist. Diese Gleichung schreiben wir in folgender Form

$$\alpha\beta(\alpha\beta)^{\nu-1} = 1.$$

Multiplizieren wir diese Gleichung mit α^{-1}, so erhalten wir

$$\beta(\alpha\beta)^{\nu-1} = \alpha^{-1}$$

und durch nochmaliges Multiplizieren mit α finden wir

$$\beta(\alpha\beta)^{\nu-1}\alpha = 1.$$

Auf Grund der Gültigkeit des assoziativen Gesetzes der Multiplikation schreiben wir die letzte Gleichung in der Form

$$(\beta\alpha)^{\nu} = 1$$

und finden

Hilfssatz I: Die beiden Operationen $\alpha\beta$ und $\beta\alpha$ haben gleiche Ordnung.

Aus der Gleichung

$$\alpha\beta(\alpha\beta)^{-1^{\nu}} = 1$$

erhalten wir

$$(\alpha\beta)^{-1} = \beta^{-1}\alpha^{-1}.$$

Da die Operationen $(\alpha\beta)$ und $(\alpha\beta)^{-1}$ gleiche Ordnungszahlen besitzen, so folgt unter Anwendung des Hilfssatzes I

Hilfssatz II: Die beiden Operationen $(\alpha\beta)$ und $(\alpha^{-1}\beta^{-1})$ haben gleiche Ordnung.

Liegen drei Operationen α, β und γ vor und kann die Operation α aus der Operation β durch Transformation mit γ hergeleitet werden, sodaß die Gleichung

$$\alpha = \gamma^{-1}\beta\gamma$$

besteht, so gilt der folgende Hilfssatz:

Hilfssatz III: Die beiden durch die Gleichung

$$\alpha = \gamma^{-1}\beta\gamma$$

verbundenen Operationen α und β haben gleiche Ordnung.

Diese Hilfssätze gestatten uns, die in § 1 gefundenen Resultate auf anderem Wege abzuleiten. Wir gehen zunächst wiederum von der definierenden Relation (1)

$$T'S' = S'^3 T'^2$$

aus, multiplizieren beide Seiten mit S^{-2} und erhalten:

$$S'^{-1}(S'^{-1}T')S' = S'T'^2. \tag{12}$$

Aus dieser Gleichung folgt unter Anwendung des Hilfssatzes III, wenn wir $\alpha = S'T'^2$, $\beta = S'^{-1}T'$ und $\gamma = S'$ setzen: Die beiden Operationen $S'^{-1}T'$ und $S'T'^2$ haben gleiche Ordnung. Aus der definierenden Relation $T'S' = S'^3T'^2$ folgt weiter durch Multiplikation mit T'^{-2}

$$T'(S'T'^{-1})T'^{-1} = S'^3. \tag{13}$$

Unter Anwendung des Hilfssatzes III folgt aus dieser Gleichung (13): Die Operationen $S'T'^{-1}$ und S'^3 haben gleiche Ordnung. Auf Grund des Hilfssatzes II haben die Operationen $(S'^{-1}T')$ und $(S'T'^{-1})$ ebenfalls die gleiche Ordnung. Wir haben somit gefunden: $S'T'^2$ hat dieselbe Ordnung wie $S'^{-1}T'$, $S'^{-1}T'$ dieselbe Ordnung wie $S'T'^{-1}$, $S'T'^{-1}$ dieselbe Ordnung wie S'^3. Daraus folgt: Die Operationen $S'T'^2$ und S'^3 haben gleiche Ordnung. Dasselbe Resultat haben wir in § 1 mit Hilfe der Methode des linksseitigen statarischen Substituierens gefunden und in Satz V ausgesprochen.

Die genaue gruppentheoretische Beziehung zwischen den Operationen S' und $S'T'^2$ ergibt sich auf folgendem Wege.

$$\begin{aligned} S'^{-1}(S'^{-1}T')S' &= S'T'^2 \\ S'^{-1}(S'^{-1}T')^{-1}S' &= (S'T'^2)^{-1} \\ (S'^{-1}T')^{-1} &= T'^{-1}S' \\ S'^{-1}(T'^{-1}S')S' &= (S'T'^2)^{-1}. \end{aligned}$$

Auf Grund der definierenden Relation ist

$$\begin{aligned} T'^{-1}S' &= T'^{-2}S'^3T'^2 \\ S'^{-1}T'^{-2}S'^3T'^2S' &= (S'T'^2)^{-1} \\ (T'^2S')^{-1}S'^3(T'^2S') &= (S'T'^2)^{-1}. \end{aligned} \tag{14}$$

Die durch Anwendung der Methode des linksseitigen statarischen Substituierens auf die durch die Gleichungen $TS = S^k T^l$, $S^\sigma = 1$, $T^\tau = 1$ definierte Gruppe erhaltenen Resultate lassen sich ebenfalls durch entsprechende Transformationen der definierenden Relation $ST = S^k T^l$ herleiten. Durch Multiplikation der definierenden Relation $TS = S^k T^l$ mit S^{-1} erhalten wir

$$S^{-1} TS = S^{k-1} T^l.$$

Beide Seiten dieser Gleichung multiplizieren wir $(l-2)$ mal mit sich selbst, d. h. wir potenzieren mit $l-2$, wodurch wir folgende Gleichung finden:

$$S^{-1} T^{l-2} S = (S^{k-1} T^l)^{l-2}.$$

Durch linksseitiges Multiplizieren der linken Seite dieser Gleichung mit $S^{-2} TS$ und der rechten Seite mit der auf Grund der definierenden Relation äquivalenten Operation $S^{k-2} T^l$ ergibt sich die Gleichung

$$S^{-1}(S^{-1} T^{l-1}) S = S^{k-2} T^l (S^{k-1} T^l)^{l-2}. \tag{15}$$

Die Operation $S^{-1} T^{l-1}$ hat also nach Hilfssatz III dieselbe Ordnung wie die Operation $S^{k-2} T^l (S^{k-1} T^l)^{l-2}$. Weiter folgt aus der durch rechtsseitiges Multiplizieren beider Seiten der definierenden Relation mit T^{-l} sich ergebenden Gleichung

$$T(S T^{-l+1}) T^{-1} = S^k$$

durch Anwendung des Hilfssatzes III, daß die Operationen $S^{-1} T^{l-1}$ und S^k gleiche Ordnungszahlen besitzen. Da auf Grund des Hilfssatzes II die Ordnungszahlen der Operationen $S^{-1} T^{l-1}$ und $ST^{-(l-1)}$ gleich sind, so folgt aus diesen Betrachtungen die Geichheit der Ordnungszahlen der Operationen S^k und $S^{k-2} T^l (S^{k-1} T^l)^{l-2}$. Dasselbe Resultat haben wir in § 1 mit Hilfe der Methode des linksseitigen statarischen Substituierens gefunden und in Satz IX ausgesprochen.

Die direkte gruppentheoretische Beziehung zwischen den Operationen S^k und $S^{k-2} T^l (S^{k-1} T^l)^{l-2}$ finden wir folgendermaßen: Durch Potenzieren der Gleichung (15) mit (-1) ergibt sich die Gleichung:

$$S^{-1}(S^{-1} T^{l-1})^{-1} S = [S^{k-2} T^l (S^{k-1} T^l)^{l-2}]^{-1},$$

deren linke Seite auf die Form

$$S^{-1}(T^{-(l-1)}S)S = [S^{k-2}T^l(S^{k-1}T^l)^{l-2}]^{-1} \tag{16}$$

gebracht wird. Aus der definierenden Relation $TS = S^kT^l$ folgt durch linksseitiges Multiplizieren mit T^{-l}

$$T^{-(l-1)}S = T^{-l}S^kT^l.$$

Durch Einsetzen der rechten Seite dieser Gleichung in die linke Seite der Gleichung (16) geht diese Gleichung über in die Form

$$S^{-1}T^{-l}S^kT^lS = [S^{k-2}T^l(S^{k-1}T^l)^{l-2}]^{-1}$$

oder

$$(T^lS)^{-1}S^k(T^lS) = [S^{k-2}T^l(S^{k-1}T^l)^{l-2}]^{-1}. \tag{17}$$

Die Operation $[S^{k-2}T^l(S^{k-1}T^l)^{l-2}]^{-1}$ entsteht also durch Transformation mit T^lS aus der Operation S^k. Setzen wir in der Gleichung (17) für $k = 3$ und $l = 2$, so erhalten wir Gleichung (14).

§ 3. Die Methode des rechtsseitigen statarischen Substituierens.

Ebenso wie zwischen den Ordnungszahlen von S und einer bestimmten Operation lassen sich auch zwischen den Ordnungszahlen von T und einer noch zu bestimmenden Operation Beziehungen aufstellen. Diese zu bestimmende Operation und die Beziehung ihrer Ordnungszahl zur Ordnungszahl der Operation T ergeben sich durch Anwendung der Methode des rechtsseitigen statarischen Substituierens, das darin besteht, daß in dem Ausdruck $S^kT^lS^kT^l$ jedesmal für die letzte Operation TS die auf Grund der definierenden Relation $TS = S^kT^l$ äquivalente Operation S^kT^l substituiert wird. Wir wenden die Methode des rechtsseitigen statarischen Substituierens der Einfachheit halber zunächst auf die definierende Relation $T'S' = S'^3T'^2$ an und erhalten:

$$\begin{aligned} T'S'T'S' &= S'^3T'^2S'^3T'^2 \\ &= S'^3T'(T'S')S'^2T'^2 \\ &= S'^3T'S'^3T'^2S'^2T'^2 \\ &= S'^3T'S'^3T'(T'S')S'T'^2 \\ &= S'^3T'S'^3T'S'^3T'^2S'T'^2 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
T'S'T'S' &= S'^3T'S'^3T'S'^3T'(T'S')T'^2 \\
&= S'^3T'S'^3T'S'^3T'S'^3T'^4 \\
&= S'^3T'S'^3T'S'^3S'^3T'^2S'^2T'^4 \\
&= S'^3T'S'^3T'S'^3S'^3T'S'^3T'^2S'T'^4 \\
&= S'^3T'S'^3T'S'^3S'^3T'S'^3T'S'^3T'^6 \\
&= S'^3T'(S'^3T'S'^3)^2S'^3T'^2S'^2T'^6 \\
&= S'^3T'(S'^3T'S'^3)^3T'^2S'T'^6 \\
&= S'^3T'(S'^3T'S'^3)^3T'S'^3T'^8 \\
&= S'^3T'(S'^3T'S'^3)^3S'^3T'^2S'^2T'^8 \\
&= S'^3T'(S'^3T'S'^3)^4T'^2S'T'^8.
\end{aligned}
$$

Nach $3n-1$ Substitutionen erhalten wir die Gleichung

$$T'S'T'S' = S'^3T'(S'^3T'S'^3)^nT'^2S'T'^{2n}. \qquad (18)$$

Aus dieser Gleichung (18) folgt nach analogen Schlüssen wie früher der Satz:

Satz XI: Die Operationen T'^2 und $S'^3T'S'^3$ haben gleiche Ordnungszahlen.

Die Beziehungen zwischen den Ordnungszahlen der Operationen T' und $S'^3T'S'^3$ lassen sich in folgende Sätzen zusammenfassen:

Satz XII: Ist b die Ordnungszahl der Operation $S'^3T'S'^3$, so ist die Ordnung der Operation T' gleich $2b$, falls b eine gerade Zahl ist. Ist b eine ungerade Zahl, so kann die Ordnung von T' sowohl gleich b, als auch gleich $2b$ sein.

Die Umkehrung dieses Satzes lautet:

Satz XIIa: Hat die Operation T' die Ordnung b, so hat die Operation $S'^3T'S'^3$ die Ordnung $\frac{b}{2}$ bez. b, je nachdem b gerade oder ungerade ist.

Die Anwendung der Methode des rechtsseitigen statarischen Substituierens auf die durch die allgemeinen Gleichungen

$$
\begin{aligned}
TS &= S^kT^l \\
S^\sigma &= 1 \\
T^\tau &= 1
\end{aligned}
$$

definierte Gruppe gestaltet sich folgendermaßen. Wir gehen aus von dem Ausdruck $S^k T^l S^k T^l$ und substituieren jedesmal für die letzte Operation TS die auf Grund der definierenden Relation $TS = S^k T^l$ äquivalente Operation $S^k T^l$.

Wir erhalten:

$$\begin{aligned} TSTS &= S^k T^l S^k T^l \\ &= S^k T^{l-1} (TS) S^{k-1} T^l \\ &= S^k T^{l-1} S^k T^l S^{k-1} T^l \\ &= S^k T^{l-1} S^k T^{l-1} (TS) S^{k-2} T^l \\ &= S^k T^{l-1} S^k T^{l-1} S^k T^l S^{k-2} T^l. \end{aligned}$$

Nach $k-1$ Substitutionen dieser Art erhalten wir

$$\begin{aligned} TSTS &= S^k T^{l-1} (S^k T^{l-1})^{k-2} S^k T^l S T^l \\ &= S^k T^{l-1} (S^k T^{l-1})^{k-2} S^k T^{l-1} (TS) T^l \\ &= S^k T^{l-1} (S^k T^{l-1})^{k-2} S^k T^{l-1} S^k T^{2l} \\ &= S^k T^{l-1} (S^k T^{l-1})^{k-2} S^k T^{l-2} (TS) S^{k-1} T^{2l} \\ &= S^k T^{l-1} (S^k T^{l-1})^{k-2} S^k T^{l-2} S^k T^l S^{k-1} T^{2l} \\ &= S^k T^{l-1} (S^k T^{l-1})^{k-2} S^k T^{l-2} S^k T^{l-1} (TS) S^{k-2} T^{2l} \\ &= S^k T^{l-1} (S^k T^{l-1})^{k-2} S^k T^{l-2} S^k T^{l-1} S^k T^l S^{k-2} T^{2l}. \end{aligned}$$

Nach $2k-1$ Substitionen erhalten wir

$$\begin{aligned} TSTS &= S^k T^{l-1} (S^k T^{l-1})^{k-2} S^k T^{l-2} (S^k T^{l-1})^{k-2} S^k T^l S T^{2l} \\ &= S^k T^{l-1} [(S^k T^{l-1})^{k-2} S^k T^{l-2}]^2 T (TS) T^{2l} \\ &= S^k T^{l-1} [(S^k T^{l-1})^{k-2} S^k T^{l-2}]^2 T S^k T^{3l} \\ &= S^k T^{l-1} [(S^k T^{l-1})^{k-2} S^k T^{l-2}]^2 (TS) S^{k-1} T^{3l} \\ &= S^k T^{l-1} [(S^k T^{l-1})^{k-2} S^k T^{l-2}]^2 S^k T^l S^{k-1} T^{3l} \\ &= S^k T^{l-1} [(S^k T^{l-1})^{k-2} S^k T^{l-2}]^2 S^k T^{l-1} (TS) S^{k-2} T^{3l} \\ &= S^k T^{l-1} [(S^k T^{l-1})^{k-2} S^k T^{l-2}]^2 S^k T^{l-1} S^k T^l S^{k-2} T^{3l}. \end{aligned}$$

Nach $3k-1$ Substitutionen erhalten wir

$$TSTS = S^k T^{l-1} [(S^k T^{l-1})^{k-2} S^k T^{l-2}]^3 T^3 S T^{3l}.$$

Nach $nk-1$ Substitutionen erhalten wir

$$TSTS = S^k T^{l-1} [(S^k T^{l-1})^{k-2} S^k T^{l-2}]^n T^2 S T^{nl}. \tag{19}$$

Auf Grund analoger Überlegungen wie früher schließen wir aus der letzten Gleichung:

Satz XIII: Die beiden Operationen T^l und $(S^k T^{l-1})^{k-2} S^k T^{l-2}$ haben gleiche Ordnung.

Zwischen den Ordnungszahlen der Operationen $(S^k T^{l-1})^{k-2} S^k T^{l-2}$ und T ergeben sich dann folgende Beziehungen:

Satz XIV: Bezeichnet b die Ordnung der Operation $(S^k T^{l-1})^{k-2} S^k T^{l-2}$, so hat die Operation S die Ordnung b', wobei die Zahl b' ein Vielfaches — vom 1-fachen bis mit l-fachen — der Zahl b ist und der Relation $\frac{b'}{[b', l]} = b$ gehorcht.

Ebenso können wir aus Gleichung (19) auch die Umkehrung vorstehenden Satzes herleiten:

Satz XIVa: Ist b die Ordnungszahl der Operation T, so hat die Operation $(S^k T^{l-1})^{k-2} S^k T^{l-2}$ die Ordnung $\frac{b}{[b, l]}$.

§ 4. Herleitung der Ergebnisse des § 3 durch Transformieren der definierenden Relationen.

Die Beziehungen zwischen den Ordnungszahlen der Operationen T' und $S'^3 T' S'^3$ bez. T und $(S^k T^{l-1})^{k-2} S^k T^{l-2}$ ergeben sich auch durch Transformieren der entsprechenden definierenden Relationen. Aus der definierenden Relation

$$T' S' = S'^3 T'^2$$

folgen durch rechtsseitiges Multiplizieren mit T'^{-1} bez. T'^{-2} die Gleichungen

$$T' S' T'^{-1} = S'^3 T'$$
$$T' S' T'^{-2} = S'^3,$$

die durch gruppentheoretische Multiplikation die Gleichung

$$T' (S'^2 T'^{-1}) T'^{-1} = S'^3 T' S'^3$$

ergeben. Wir potenzieren beide Seiten dieser Gleichung mit (-1) und erhalten

$$T' (T' S'^{-2}) T'^{-1} = (S'^3 T' S'^3)^{-1}.$$

Für die Operation $T'S'^{-2}$ finden wir aus der definierenden Relation $T'S' = S'^3T'^2$ durch rechtsseitiges Multiplizieren mit S'^{-3} folgende äquivalente Operation:

$$T'S'^{-2} = S'^3T'^2S'^3.$$

Diesen Ausdruck setzen wir in die linke Seite der vorigen Gleichung ein und finden

$$(T'S'^3)T'^2(T'S'^3)^{-1} = (S'^3T'S'^3)^{-1}. \tag{20}$$

Die beiden Operationen T'^2 und $S'^3T'S'^3$ haben also auf Grund des Hilfssatzes III, § 2 gleiche Ordnung.

Die Beziehung zwischen den Ordnungszahlen der Operation T und $(S^kT^{l-1})^{k-2}S^kT^{l-2}$ läßt sich ebenfalls durch Vornahme gewisser Transformationen aus der definierenden Relation $TS = S^kT^l$ herleiten. Durch rechtsseitiges Multiplizieren der definierenden Relation

$$TS = S^kT^l$$

mit T^{-1} ergibt sich die Gleichung

$$TST^{-1} = S^kT^{l-1}.$$

Beide Seiten dieser Gleichung potenzieren wir mit $k-2$

$$TS^{k-2}T^{-1} = (S^kT^{l-1})^{k-2}.$$

Durch rechtsseitiges Multiplizieren der linken Seite dieser Gleichung mit TST^{-2} und der rechten Seite mit der diesem Faktor auf Grund der definierenden Relation $TS = S^kT^l$ äquivalenten Operation S^kT^{l-2} geht die letzte Gleichung über in

$$T(S^{k-1}T^{-1})T^{-1} = (S^kT^{l-1})^{k-2}S^kT^{l-2}. \tag{21}$$

Wir erheben beide Seiten dieser Gleichung in die (-1)te Potenz:

$$T(TS^{-(k-1)})T^{-1} = [(S^kT^{l-1})^{k-2}S^kT^{l-2}]^{-1}. \tag{21a}$$

Die Operation links läßt sich auf Grund der definierenden Relation als transformierte Operation der Operation T^l darstellen; denn aus der Gleichung

$$TS = S^kT^l$$

folgt durch rechtsseitiges Multiplizieren mit S^{-k} die Gleichung

$$TS^{-(k-1)} = S^k T^l S^{-k}.$$

Setzen wir für $TS^{-(k-1)}$ die äquivalende Operation $S^k T^l S^{-k}$ in die Gleichung (21a) ein, so erhalten wir

$$(TS^k)\,T^l\,(TS^k)^{-1} = [(S^k T^{l-1})^{k-2} S^k T^{l-2}]^{-1}. \qquad (22)$$

Aus dieser Gleichung (22) folgt durch Anwendung des Hilfssatzes III, daß die Operationen T^l und $(S^k T^{l-1})^{k-2} S^k T^{l-2}$ gleiche Ordnung haben. Für die Ordnungszahlen der Operationen T und $(S^k T^{l-1})^{k-2} S^k T^{l-2}$ ergeben sich dann die Sätze XIV und XIVa.

Die beiden Gleichungen (19) und (22), die sich unter Zugrundelegung der allgemeinen definierenden Relation $TS = S^k T^l$ ergeben, gehen in die Gleichungen (18) und (20) über, die wir aus der speziellen definierenden Relation $T'S' = S'^3 T'^2$ erhalten haben, wenn wir $k = 3$ und $l = 2$ setzen. Die Anzahl der Substitutionen, die zu den Gleichungen (18) und (19) führen, ist nur eine Funktion vom Exponent der Operation S' bez. S in der betreffenden definierenden Relation und vom Exponent der Operation T' bez. T unabhängig, was auch aus der Betrachtung der Methode des rechtsseitigen statarischen Substituierens ohne weiteres hervorgeht.

Die beiden Operationen $S^{k-2} T^l (S^{k-1} T^l)^{l-2}$ bez. $(S^k T^{l-1})^{k-2} S^k T^{l-2}$ der Gleichungen (11) und (19), die in der durch die Gleichungen $TS = S^k T^l$, $S^\sigma = 1$, $T^\tau = 1$ definierten Gruppe enthalten sind und mit den beiden Operationen S^k bez. T^l gleiche Ordnung haben, zeigen eine gewisse Symmetrie. Die zweite Operation $(S^k T^{l-1})^{k-2} S^k T^{l-2}$ geht in die erste Operation über, wenn wir in ihr für

$$k \rightleftarrows l$$
$$S^k \rightleftarrows T^l$$
$$S^{k-1} \rightleftarrows T^{l-1}$$
$$S^{k-2} \rightleftarrows T^{l-2}$$

setzen uud die erhaltenen Einzeloperationen zu einer neuen Operation, aber in umgekehrter Reihenfolge zusammenstellen.

Liegt eine spezielle definierende Relation zugrunde und will man nach diesem Verfahren aus der Operation, die mit der betreffenden Potenz der Operation S, deren Exponent in der definierenden Relation gegeben ist, gleiche Ordnung hat, die entsprechende Operation herleiten, die mit der betreffenden Potenz der Operation T, deren Exponent in derselben definierenden Relation gegeben ist, gleiche Ordnung hat, so muß man die erste Operation erst in die allgemeine Form $S^{k-2}T^l(S^{k-1}T^l)^{l-2}$ bringen, bevor man dieses Verfahren anwenden kann. Die Ausdrücke für die Anzahl der Substitutionen $nl-1$ bez. $nk-1$, die zu den Gleichungen (11) und (19) führen, zeigen dieselbe Symmetrie.

§ 5. Unabhängigkeit der durch Anwendung der Methoden des statarischen Substituierens gefundenen Resultate von der Wahl der Ausgangsoperation.

In § 1 und § 3 haben wir die Methoden des statarischen Substituierens auf die Operation $S^kT^lS^kT^l$ angewendet. Die einfache Überlegung ergibt, daß wir zu genau denselben Resultaten gelangen, wenn wir die Methoden auf eine beliebige andere Operation anwenden. Der Vollständigkeit halber soll dies unter Zugrundelegung der durch die Gleichungen

$$TS = S^kT^l$$
$$S^\sigma = 1$$
$$T^\tau = 1$$

definierten Gruppe für die Methode des linksseitigen statarischen Substituierens gezeigt werden, indem wir die allgemeine Operation

$$S^\alpha T^\beta S^\gamma T^\delta \ldots$$

als Ausgangsoperation wählen.

$$S^\alpha T^\beta S^\gamma T^\delta \ldots$$
$$= S^\alpha T^{\beta-1}(TS)S^{\gamma-1}T^\delta \ldots$$
$$= S^\alpha T^{\beta-1}S^kT^lS^{\gamma-1}T^\delta$$
$$= S^\alpha T^{\beta-2}(TS)S^{k-1}T^lS^{\gamma-1}T^\delta$$

$$= S^{\alpha} T^{\beta-2} S^{k} T^{l} S^{k-1} T^{l} S^{\gamma-1} T^{\delta}$$
$$= S^{\alpha} T^{\beta-3} (TS) S^{k-1} T^{l} S^{k-1} T^{l} S^{\gamma-1} T^{\delta}$$
$$= S^{\alpha} T^{\beta-3} S^{k} T^{l} S^{k-1} T^{l} S^{k-1} T^{l} S^{\gamma-1} T^{\delta}$$
. . . . . .
$$= S^{\alpha} S^{k} T^{l} (S^{k-1} T^{l})^{\beta-1} S^{\gamma-1} T^{\delta}$$
$$= S^{\alpha} S^{k} T^{l-1} (TS) S^{k-2} T^{l} (S^{k-1} T^{l})^{\beta-2} S^{\gamma-1} T^{\delta}$$
$$= S^{\alpha} S^{k} T^{l-1} S^{k} T^{l} S^{k-2} T^{l} (S^{k-1} T^{l})^{\beta-2} S^{\gamma-1} T^{\delta}$$
$$= S^{\alpha} S^{k} T^{l-2} (TS) S^{k-1} T^{l} S^{k-2} T^{l} (S^{k-1} T^{l})^{\beta-2} S^{\gamma-1} T^{\delta}$$
$$= S^{\alpha} S^{k} T^{l-2} S^{k} T^{l} S^{k-1} T^{l} S^{k-2} T^{l} (S^{k-1} T^{l})^{\beta-2} S^{\gamma-1} T^{\delta}$$
$$= S^{\alpha} S^{k} T^{l-3} (TS) S^{k-1} T^{l} S^{k-1} T^{l} S^{k-2} T^{l} (S^{k-1} T^{l})^{\beta-2} S^{\gamma-1} T^{\delta}$$
$$= S^{\alpha} S^{k} T^{l-3} S^{k} T^{l} S^{k-1} T^{l} S^{k-1} T^{l} S^{k-2} T^{l} (S^{k-1} T^{l})^{\beta-2} S^{\gamma-1} T^{\delta}$$
. . . . . .
$$= S^{k} S^{\alpha+k} T^{l} S S^{k-2} T^{l} (S^{k-1} T^{l})^{l-2} S^{k-2} T^{l} (S^{k-1} T^{l})^{\beta-2} S^{\gamma-1} T^{\delta}$$
$$= S^{k} S^{\alpha+k} T^{l-1} (TS) S^{k-2} T^{l} (S^{k-1} T^{l})^{l-2} S^{k-2} T^{l} (S^{k-1} T^{l})^{\beta-2} S^{\gamma-1} T^{\delta}$$
$$= S^{k} S^{\alpha+k} T^{l-1} S^{k} T^{l} S^{k-2} T^{l} (S^{k-1} T^{l})^{l-2} S^{k-2} T^{l} (S^{k-1} T^{l})^{\beta-2} S^{\gamma-1} T^{\delta}$$
$$= S^{k} S^{\alpha+k} T^{l-2} (TS) S^{k-1} T^{l} S^{k-2} T^{l} (S^{k-1} T^{l})^{l-2} S^{k-2} T^{l} (S^{k-1} T^{l})^{\beta-2} S^{\gamma-1} T^{\delta}$$
$$= S^{k} S^{\alpha+k} T^{l-2} S^{k} T^{l} S^{k-1} T^{l} S^{k-2} T^{l} (S^{k-1} T^{l})^{l-2} S^{k-2} T^{l} (S^{k-1} T^{l})^{\beta-2} S^{\gamma-1} T^{\delta}$$
. . . . . .
$$= S^{2k} S^{\alpha+k} T^{l} S [S^{k-2} T^{l} (S^{k-1} T^{l})^{l-2}]^{2} S^{k-2} T^{l} (S^{k-1} T^{l})^{\beta-2} S^{\gamma-1} T^{\delta}$$
. . . . . .
$$= S^{nk} S^{\alpha+k} T^{l} S [S^{k-2} T^{l} (S^{k-1} T^{l})^{l-2}]^{n} S^{k-2} T^{l} (S^{k-1} T^{l})^{\beta-2} S^{\gamma-1} T^{\delta}. \quad (23)$$

Wir erhalten also durch Anwendung der Methode des linksseitigen statarischen Substituierens auf die allgemeine Operation $S^{\alpha} T^{\beta} S^{\gamma} T^{\delta} \ldots$ dieselbe Operation $S^{k-2} T^{l} (S^{k-1} T^{l})^{l-2}$, die mit der Operation S^{k} gleiche Ordnung hat.

Der Vollständigkeit halber wollen wir auch noch für die Methode des rechtsseitigen statarischen Substituierens zeigen, daß wir genau dieselbe Operation $(S^{k} T^{l-1})^{k-2} S^{k} T^{l-2}$ finden, gleichgültig auf welche Ausgangsoperation wir die Methode anwenden. Wir wählen als Ausgangsoperation

$$
\begin{aligned}
& S^{\alpha} T^{\beta} S^{\gamma} T^{\delta} \\
&= S^{\alpha} T^{\beta-1} (TS) S^{\gamma-1} T^{\delta} \\
&= S^{\alpha} T^{\beta-1} S^{k} T^{l} S^{\gamma-1} T^{\delta} \\
&= S^{\alpha} T^{\beta-1} S^{k} T^{l-1} (TS) S^{\gamma-2} T^{\delta} \\
&= S^{\alpha} T^{\beta-1} S^{k} T^{l-1} S^{k} T^{l} S^{\gamma-2} T^{\delta} \\
&\quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\
&= S^{\alpha} T^{\beta-1} (S^{k} T^{l-1})^{\gamma-1} S^{k} T^{l} T^{\delta} \\
&= S^{\alpha} T^{\beta-1} (S^{k} T^{l-1})^{\gamma-2} S^{k} T^{l-2} (TS) S^{k-1} T^{l} T^{\delta} \\
&= S^{\alpha} T^{\beta-1} (S^{k} T^{l-1})^{\gamma-2} S^{k} T^{l-2} S^{k} T^{l} S^{k-1} T^{l} T^{\delta} \\
&= S^{\alpha} T^{\beta-1} (S^{k} T^{l-1})^{\gamma-2} S^{k} T^{l-2} S^{k} T^{l-1} (TS) S^{k-2} T^{l} T^{\delta} \\
&= S^{\alpha} T^{\beta-1} (S^{k} T^{l-1})^{\gamma-2} S^{k} T^{l-2} S^{k} T^{l-1} S^{k} T^{l} S^{k-2} T^{l} T^{\delta} \\
&\quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\
&= S^{\alpha} T^{\beta-1} (S^{k} T^{l-1})^{\gamma-2} S^{k} T^{l-2} (S^{k} T^{l-1})^{k-2} S^{k} T^{l-2} TS^{k} T^{l} + \delta T^{l} \\
&= S^{\alpha} T^{\beta-1} (S^{k} T^{l-1})^{\gamma-2} S^{k} T^{l-2} (S^{k} T^{l-1})^{k-2} S^{k} T^{l-2} (TS) S^{k-1} T^{l} + \delta T^{l} \\
&= S^{\alpha} T^{\beta-1} (S^{k} T^{l-1})^{\gamma-2} S^{k} T^{l-2} (S^{k} T^{l-1})^{k-2} S^{k} T^{l-2} S^{k} T^{l} S^{k-1} T^{l} + \delta T^{l} \\
&= S^{\alpha} T^{\beta-1} (S^{k} T^{l-1})^{\gamma-2} S^{k} T^{l-2} (S^{k} T^{l-1})^{k-2} S^{k} T^{l-2} S^{k} T^{l-1} (TS) S^{k-2} T^{l} + \delta T^{l} \\
&= S^{\alpha} T^{\beta-1} (S^{k} T^{l-1})^{\gamma-2} S^{k} T^{l-2} (S^{k} T^{l-1})^{k-2} S^{k} T^{l-2} S^{k} T^{l-1} S^{k} T^{l} S^{k-2} T^{l} + \delta T^{l} \\
&\quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\
&= S^{\alpha} T^{\beta-1} (S^{k} T^{l-1})^{\gamma-2} S^{k} T^{l-2} [(S^{k} T^{l-1})^{k-2} S^{k} T^{l-2}]^{2} TS^{k} T^{l} + \delta T^{2l} \\
&\quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\
(23\,\mathrm{a}) \quad &= S^{\alpha} T^{\beta-1} (S^{k} T^{l-1})^{\gamma-2} S^{k} T^{l-2} [(S^{k} T^{l-1})^{k-2} S^{k} T^{l-2}]^{n} TS^{k} T^{l} + \delta T^{nl}.
\end{aligned}
$$

Durch Anwendung der Methode des rechtsseitigen statarischen Substituierens auf die Operation $S^{\alpha} T^{\beta} S^{\gamma} T^{\delta}$ erhalten wir also dieselbe Operation $(S^{k} T^{l-1})^{k-2} S^{k} T^{l-2}$, die mit der Operation T^{l} die gleiche Ordnung hat.

2. Abschnitt.

Die Methoden des kursorischen Substituierens.

§ 6. Allgemeine Betrachtung der Methoden des kursorischen Substituierens.

Bei den Methoden des statarischen Substituierens handelt es sich lediglich um die erste bez. letzte Operation TS, für welche die auf Grund der definierenden Relation äquivalente Operation $S^k T^l$ eingesetzt wird. Es liegt nun nahe, in dem jeweilig zugrunde liegenden Ausdruck fortlaufend zu substituieren. Dabei gehen wir wiederum wie bei den Methoden des statarischen Substituierens von dem Ausdruck

$$S^k T^l S^k T^l,$$

den wir mit A bezeichnen, aus. Zur Bildung der durch $S^k T^l$ zu ersetzenden Operationen TS verwenden wir der Reihe nach die sämtlichen verwendbaren Einzeloperationen S von A. Durch Ausführung dieser k Substitutionen $TS = S^k T^l$ erreichen wir eine Erhöhung des Exponent der Schlußoperation T und gelangen zu einem Ausdruck, den wir mit A_1 bezeichnen. Die Gesamtheit der ausgeführten k Substitutionen bezeichnen wir als erste Durchführung der Methode des vorlaufenden Substituierens. Die Bezeichnung „Methode des vorlaufenden Substituierens“ wählen wir zum Unterschied von der später zu besprechenden „Methode des rücklaufenden Substituierens“, bei der wir in analoger Weise von rechts nach links substituieren werden. Den Ausdruck A_1,

der sich als Resultat der ersten Durchführung ergeben hat, legen wir den weiteren Substitutionen $TS = S^k T^l$ zugrunde und verwenden zur Bildung der durch $S^k T^l$ zu ersetzenden Operationen TS der Reihe nach die sämtlichen in dem Ausdruck A_1 enthaltenen verwendbaren S-Operationen. Wir bezeichnen die Gesamtheit dieser k^2 Substitutionen als die zweite Durchführung der Methode des vorlaufenden Substituierens und den resultierenden Ausdruck mit A_2. Man sieht ohne weiteres, daß in dem Ausdruck A_2 der Exponent der Schlußoperation T wiederum eine Erhöhung erfährt. Den Ausdruck A_2 legen wir nun den weiteren Substitutionen zugrunde, wobei wir zur Bildung der durch $S^k T^l$ zu ersetzenden Operationen TS wiederum der Reihe nach die sämtlichen in dem Ausdruck A_2 enthaltenen verwendbaren S-Operationen verwenden. Die Gesamtheit dieser k^3 Substitutionen bezeichnen wir als dritte Durchführung der Methode des vorlaufenden Substituierens. Der aus der dritten Durchführung resultierende Ausdruck A_3 zeigt wiederum eine Erhöhung des Exponenten der Schlußoperation T. Allgemein verstehen wir also unter der νten Durchführung der Methode des vorlaufenden Substituierens die Gesamtheit der Substitutionen, die wir unter Verwendung der sämtlichen in dem Ausdruck $A_{\nu-1}$ enthaltenen verwendbaren S-Operationen der Reihe nach zur Bildung der durch $S^k T^l$ zu ersetzenden Operationen TS in dem Ausdruck $A_{\nu-1}$ ausführen. Den aus der νten Durchführung resultierenden Ausdruck bezeichnen wir mit A_ν. Man sieht ohne weiteres, daß mit jeder Durchführung der Exponent der ersten T-Operation um 1 abnimmt. Nach der $l$ten Durchführung, die k^l Substitutionen umfaßt, gelangen wir zu einem Ausdruck, den wir mit A_l bezeichnen und in dem der Exponent der ersten Operation T gleich Null geworden ist. Die durch das Verschwinden dieser T-Operation unmittelbar aneinander stoßenden S^k-Operationen fassen wir unter Addierung der Exponenten zu einer Operation zusammen. Die Gesamtheit der ersten l Durchführungen der Methode des vorlaufenden Substituierens bezeichnen wir als ersten Substitutionsgang. Den Ausdruck A_l legen wir der $(l+1)$ten Durchführung, die nach denselben Prinzipien erfolgt und $(k^l - 1)$ k-Substitutionen umfaßt, zugrunde. Nach Ausführung der $(2\,l - 1)$ten Durchführung der Methode des vorlaufenden Substituierens, die $(k^l - 1)$ k^{l-1}

Substitutionen umfaßt, erhalten wir den Ausdruck A_{2l-1}, in welchem der Exponent der ersten T-Operation wiederum gleich Null geworden ist. Die durch das Verschwinden dieser T-Operation unmittelbar aneinander stoßenden S-Potenz-Operationen fassen wir durch Addieren der Exponenten zu einer Operation zusammen. Die Gesamtheit der $(l+1)$ten bis mit $(2l-1)$ten Durchführung bezeichnen wir als den zweiten Substitutionsgang. Allgemein verstehen wir unter dem μten Substitutionsgang die Gesamtheit der $[(\mu-1)l-(\mu-3)]$ten bis mit $[\mu l-(\mu-1)]$ten Durchführung der Methode des vorlaufenden Substituierens. Jeder aus einer Durchführung resultierende Ausdruck zeigt eine Erhöhung des Exponenten der Schlußoperation T, jeder aus einem Substitutionsgang resultierende Ausdruck zeigt sowohl eine Erhöhung des Exponenten der Anfangsoperation S als auch der Schlußoperation T.

Das Gegenstück zu dieser Methode des vorlaufenden Substituierens ist die Methode des rücklaufenden Substituierens. Wir gehen bei dieser Methode ebenfalls wieder von der Operation $S^k T^l S^k T^l$ aus, die wir mit B bezeichnen, und führen zunächst l Substitutionen $TS = S^k T^l$ aus, indem wir zur Bildung der zu ersetzenden Operation TS der Reihe nach von rechts nach links die sämtlichen verwendbaren Einzeloperationen T der Operation B verwenden. Durch l Substitutionen geht der Ausdruck B in den äquivalenten Ausdruck B_1 über, in welchem der Exponent der von rechts her an lezter Stelle stehenden S-Operation eine Erhöhung zeigt. Die Gesamtheit dieser l Substitutionen bezeichnen wir als erste Durchführung der Methode des rücklaufenden Substituierens. Den Ausdruck B_1 legen wir den nächsten l^2 Substitutionen zu Grunde, bei denen wir zur Bildung der durch $S^k T^l$ zu ersetzenden Operation TS der Reihe nach von rechts nach links die sämtlichen verwendbaren in B_1 enthaltenen T-Operationen verwenden. Nach Ausführung dieser l^2 Substitutionen geht der Ausdruck B_1 in den äquivalenten Ausdruck B_2 über, in dem wiederum der Exponent der von rechts her an letzter Stelle stehenden S-Operation eine Erhöhung zeigt. Die Gesamtheit dieser l^2 Substitutionen bezeichnen wir als zweite Durchführung der Methode des rücklaufenden Substituierens. Allgemein

verstehen wir unter der νten Durchführung der Methode des rücklaufenden Substituierens die Gesamtheit der Substitutionen, die wir unter Verwendung der sämtlichen in dem Ausdruck $B_{\nu-1}$ enthaltenen verwendbaren T-Operationen zur Bildung der durch $S^k T^l$ zu ersetzenden Operationen TS in dem Ausdruck $B_{\nu-1}$ ausführen. Den aus der νten Durchführung resultierenden Ausdruck bezeichnen wir mit B_ν. Bei jeder Durchführung vermindert sich der Exponent der von rechts her an erster Stelle stehenden S^k-Operation um die Einheit und nach k Durchführungen, die zum Ausdruck B_k führen, wird dieser Exponent gleich Null, und der Exponent der von rechts her an erster Stelle stehenden T-Operation zeigt zum ersten Mal eine Erhöhung. Die Gesamtheit dieser k Durchführungen bezeichnen wir als ersten Substitutionsgang. Den Ausdruck B_k legen wir der $(k+1)$ten Durchführung zugrunde, die, wie man sieht, $(l^k-1)\,l$ Substitutionen umfaßt und zu dem Ausdruck B_{k+1} führt. Die $(2k-1)$te Durchführung der Methode des rücklaufenden Substituierens, die $(l^k-1)\,l^{k-1}$ Substitutionen umfaßt, führt zu dem Ausdruck B_{2k-1}, in welchem der Exponent der ersten S-Operation von rechts her gleich Null ist. Die beiden T-Operationen, die infolge des Verschwindens dieser S-Operation unmittelbar aneinander stoßen, fassen wir wiederum unter Addieren der Exponenten zu einer T-Operation zusammen. Die Gesamtheit der $(k+1)$ten bis mit $(2k-1)$ten Durchführung der Methode des rücklaufenden Substituierens fassen wir zu dem zweiten Substitutionsgang zusammen. Allgemein verstehen wir unter dem μten Substitutionsgang der Methode des rücklaufenden Substituierens die Gesamtheit der $[(\mu-1)\,k-(\mu-3)]$ten bis mit $[\mu k-(\mu-1)]$ten Durchführung, durch die der Exponent der ersten S-Operation von rechts her des Ausdruckes $A_{(\mu-1)k-(\mu-2)}$, der der ersten Durchführung dieses Substitutionsganges zugrunde liegt, zum Verschwinden gebracht wird.

Durch Anwendung dieser beiden Methoden erreichen wir also ein periodisches Wachsen der Exponenten der Anfangs- und Endoperation. Gleichzeitig erhalten wir gewisse zusammengesetzte Operationen, die gewissen der definierenden Relation $TS = S^k T^l$ völlig analogen Gleichungen gehorchen.

§ 7. Anwendung der Methode des vorlaufenden Substituierens auf die durch die Gleichungen $T'S' = S'^3 T'^2$, $S'^{\sigma'} = 1$, $T'^{\tau'} = 1$ definierte Gruppe.

Wir legen der Einfachheit halber zunächst wieder, wie bei den früheren Untersuchungen, die durch die Gleichungen

$$T'S' = S'^3 T'^2$$
$$S'^{\sigma'} = 1$$
$$T'^{\tau'} = 1$$

definierte Gruppe zugrunde und bilden die Gleichung

$$T'S'T'S' = S'^3 T'^2 S'^3 T'^2.$$

In dem Ausdruck auf der rechten Seite, den wir auf Grund der allgemeinen Erörterungen mit A' bezeichnen, substituieren wir $T'S' = S'^3 T'^2$, indem wir zur Bildung der durch $S'^3 T'^2$ zu ersetzenden Operationen $T'S'$ die sämtlichen Einzeloperationen S' der an zweiter Stelle stehenden S'-Potenz-Operation verwenden. Wir erhalten

$$\begin{aligned} T'S'T'S' &= S'^3 T'(T'S')S'^2 T'^2 \\ &= S'^3 T'S'^3 T'^2 S'^2 T'^2 \\ &= S'^3 T'S'^3 T'(T'S')S'T'^2 \\ &= S'^3 T'S'^3 T'S'^3 T'^2 S'T'^2 \\ &= S'^3 T'S'^3 T'S'^3 T'(T'S')T'^2 \\ &= S'^3 T'S'^3 T'S'^3 T'S'^3 T'T'^3. \end{aligned} \tag{24}$$

Die erste Durchführung der Methode des vorlaufenden Substituierens umfaßt also 3 Substitutionen. In dem resultierenden Ausdruck, den wir mit A_1' bezeichnen, fassen wir T'^3 als Endoperation auf, sodaß also der Exponent um 1 gewachsen ist. Den Ausdruck A_1 legen wir der zweiten Durchführung zugrunde. Die Verwendung der Einzeloperationen S der zweiten S-Potenz-Operation zur Bildung der durch $S'^3 T'^2$ zu ersetzenden Operationen $T'S'$ ergibt folgende Substitutionen:

$$
\begin{aligned}
T'S'T'S' &= S'^3(T'S')S'^2T'S'^3T'S'^3T'T'^3 \\
&= S'^6T'^2S'^2T'S'^3T'S'^3T'T'^3 \\
&= S'^6T'(T'S')S'T'S'^3T'S'^3T'T'^3 \\
&= S'^6T'S'^3T'^2S'T'S'^3T'S'^3T'T'^3 \\
&= S'^6T'S'^3T'(T'S')T'S'^3T'S'^3T'T'^3 \\
&= S'^6T'S'^3T'S'^3T'^2T'S'^3T'S'^3T'T'^3.
\end{aligned}
$$

Die Verwendung der Einzeloperationen S der dritten und vierten S-Potenz-Operation des Ausdruckes A_1 zur Bildung der zu ersetzenden Operationen TS gibt folgende Substitutionen:

$$
\begin{aligned}
&T'S'T'S' \\
&= S'^6T'S'^3T'S'^3T'^2(T'S')S'^2T'S'^3T'T'^3 \\
&= S'^6T'S'^3T'S'^3T'^2S'^3T'^2S'^2T'S'^3T'T'^3 \\
&= S'^6T'S'^3T'S'^3T'^2S'^3T'(T'S')S'T'S'^3T'T'^3 \\
&= S'^6T'S'^3T'S'^3T'^2S'^3T'S'^3T'^2S'T'S'^3T'T'^3 \\
&= S'^6T'S'^3T'S'^3T'^2S'^3T'S'^3T'(T'S')T'S'^3T'T'^3 \\
&= S'^6T'S'^3T'S'^3T'^2S'^3T'S'^3T'S'^3T'^2T'S'^3T'T'^3 \\
&= S'^6T'S'^3T'S'^3T'^2S'^3T'S'^3T'S'^3T'^2(T'S')S'^2T'T'^3 \\
&= S'^6T'S'^3T'S'^3T'^2S'^3T'S'^3T'S'^3T'^2S'^3T'^2S'^2T'T'^3 \\
&= S'^6T'S'^3T'S'^3T'^2S'^3T'S'^3T'S'^3T'^2S'^3T'(T'S')S'T'T'^3 \\
&= S'^6T'S'^3T'S'^3T'^2S'^3T'S'^3T'S'^3T'^2S'^3T'S'^3T'^2S'T'T'^3 \\
&= S'^6T'S'^3T'S'^3T'^2S'^3T'S'^3T'S'^3T'^2S'^3T'S'^3T'(T'S')T'T'^3 \\
(25)\quad &= S'^6T'S'^3T'S'^3T'^2S'^3T'S'^3T'S'^3T'^2S'^3T'S'^3T'S'^3T'^2T'^4.
\end{aligned}
$$

Die zweite Durchführung umfaßt also 3^2 Substitutionen. Die ersten beiden Durchführungen bilden den ersten Substitutionsgang. Wir erkennen sofort, daß die folgenden Substitutionsgänge nur je eine Durchführung enthalten, was auch aus den allgemeinen Erörterungen sofort folgt.

Den aus der zweiten Durchführung resultierenden Ausdruck A_2 legen wir der dritten Durchführung, die identisch ist mit dem zweiten Substitutionsgang, zugrunde. Die Verwendung der Einzeloperationen S der zweiten und dritten S-Potenz-Operation ergibt folgende Substitutionen:

$$
\begin{aligned}
& T' S' T' S' \\
&= S'^{6} (T' S') S'^{2} T' S'^{3} T'^{2} S'^{3} T' S'^{3} T' S'^{3} T'^{2} S'^{3} T' S'^{3} T' S'^{3} T'^{2} T'^{4} \\
&= S'^{9} T'^{2} S'^{2} T' S'^{3} T'^{2} S'^{3} T' S'^{3} T' S'^{3} T'^{2} S'^{3} T' S'^{3} T' S'^{3} T'^{2} T'^{4} \\
&= S'^{9} T' (T' S') S' T' S'^{3} T'^{2} S'^{3} T' S'^{3} T' S'^{3} T'^{2} S'^{3} T' S'^{3} T' S'^{3} T'^{2} T'^{4} \\
&= S'^{9} T' S'^{3} T'^{2} S' T' S'^{3} T'^{2} S'^{3} T' S'^{3} T' S'^{3} T'^{2} S'^{3} T' S'^{3} T' S'^{3} T'^{2} T'^{4} \\
&= S'^{9} T' S^{3} T' (T' S') T' S'^{3} T'^{2} S'^{3} T' S'^{3} T' S'^{3} T'^{2} S'^{3} T' S'^{3} T' S'^{3} T'^{2} T'^{4} \\
&= S'^{9} T' S'^{3} T' S^{3} T'^{2} T' S'^{3} T'^{2} S'^{3} T' S'^{3} T' S'^{3} T'^{2} S'^{3} T' S'^{3} T' S'^{3} T'^{2} T'^{4} \\
&= S'^{9} T' S'^{3} T' S^{3} T'^{2} (T' S') S'^{2} T'^{2} S'^{3} T' S'^{3} T' S^{3} T'^{2} S'^{3} T' S'^{3} T' S'^{3} T'^{2} T'^{4} \\
&= \ldots\ldots\ldots S'^{3} T'^{2} S'^{2} T'^{2} S'^{3} T' S'^{3} T' S'^{3} T'^{2} S'^{3} T' S'^{3} T' S'^{3} T'^{2} T'^{4} \\
&= \ldots\ldots\ldots S'^{3} T'^{2} (T' S') S' T'^{2} S'^{3} T' S'^{3} T' S'^{3} T'^{2} S'^{3} T' S'^{3} T' S'^{3} T'^{2} T'^{4} \\
&= \ldots\ldots\ldots S'^{3} T' S'^{3} T'^{2} S' T'^{2} S'^{3} T' S'^{3} T' S'^{3} T'^{2} S'^{3} T' S'^{3} T' S'^{3} T'^{2} T'^{4} \\
&= \ldots\ldots\ldots S'^{3} T' S'^{3} T'^{2} (T' S') T'^{2} S'^{3} T' S'^{3} T' S'^{3} T'^{2} S'^{3} T' S'^{3} T' S'^{3} T'^{2} T'^{4} \\
&= \ldots\ldots\ldots S'^{3} T' S'^{3} T' S'^{3} T'^{3} T' S'^{3} T' S'^{3} T' S'^{3} T'^{2} S'^{3} T' S'^{3} T' S'^{3} T'^{2} T'^{4}
\end{aligned}
$$

Die Verwendung der Einzeloperationen S der übrigen S-Potenz-Operationen ergibt folgende Ausdrücke:

$$
\begin{aligned}
&= \ldots\ldots\ldots S'^{3} T' S'^{3} T' S'^{3} T'^{3} (T' S') S'^{2} T' S'^{3} T' S'^{3} T'^{2} S'^{3} T' S'^{3} T' S'^{3} T'^{2} T'^{4} \\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots S'^{3} T'^{2} S'^{2} T' S'^{3} T' S'^{3} T'^{2} S'^{3} T' S'^{3} T' S'^{3} T'^{2} T'^{4} \\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots S'^{3} T' (T' S') S' T' S'^{3} T' S'^{3} T'^{2} S'^{3} T' S'^{3} T' S'^{3} T'^{2} T'^{4} \\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots S'^{3} T' S'^{3} T'^{2} S' T' S'^{3} T' S'^{3} T'^{2} S'^{3} T' S'^{3} T' S'^{3} T'^{2} T'^{4} \\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots S'^{3} T' S'^{3} T' (T' S') T' S'^{3} T' S'^{3} T'^{2} S'^{3} T' S'^{3} T' S'^{3} T'^{2} T'^{4} \\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots S'^{3} T' S'^{3} T' S'^{3} T'^{2} T' S'^{3} T' S'^{3} T'^{2} S'^{3} T' S'^{3} T' S'^{3} T'^{2} T'^{4} \\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots S'^{3} T' S'^{3} T' S'^{3} T'^{2} (T' S') S'^{2} T' S'^{3} T'^{2} S'^{3} T' S'^{3} T' S'^{3} T'^{2} T'^{4} \\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots S'^{3} T'^{2} S'^{2} T' S'^{3} T'^{2} S'^{3} T' S'^{3} T' S'^{3} T'^{2} T'^{4} \\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots S'^{3} T' (T' S') S' T' S'^{3} T'^{2} S'^{3} T' S'^{3} T' S'^{3} T'^{2} T'^{4} \\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots S'^{3} T' S'^{3} T'^{2} S' T' S^{3} T'^{2} S'^{3} T' S'^{3} T' S'^{3} T'^{2} T'^{4}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= S'^3T'S'^3T'(T'S')T'S'^3T'^2S'^3T'S'^3T'S'^3T'^2T'^4\\
&= S'^3T'S'^3T'S'^3T'^2T'S'^3T'^2S'^3T'S'^3T'S'^3T'^2T'^4\\
&= S'^3T'S'^3T'S'^3T'^2(T'S')S'^2T'^2S'^3T'S'^3T'S'^3T'^2T'^4\\
&= S'^3T'^2S'^2T'^2S'^3T'S'^3T'S'^3T'^2T'^4\\
&= S'^3T'(T'S')S'T'^2S'^3T'S'^3T'S'^3T'^2T'^4\\
&= S'^3T'S'^3T'^2S'T'^2S'^3T'S'^3T'S'^3T'^2T'^4\\
&= S'^3T'S'^3T'(T'S')T'^2S'^3T'S'^3T'S'^3T'^2T'^4\\
&= S'^3T'S'^3T'S'^3T'^3T'S'^3T'S'^3T'S'^3T'^2T'^4\\
&= S'^3T'S'^3T'S'^3T'^3(T'S')S'^2T'S'^3T'S'^3T'^2T'^4\\
&= S'^3T'^2S'^2T'S'^3T'S'^3T'^2T'^4\\
&= S'^3T'(T'S')S'T'S'^3T'S'^3T'^2T'^4\\
&= S'^3T'S'^3T'^2S'T'S'^3T'S'^3T'^2T'^4\\
&= S'^3T'S'^3T'(T'S')T'S'^3T'S'^3T'^2T'^4\\
&= S'^3T'S'^3T'S'^3T'^2T'S'^3T'S'^3T'^2T'^4\\
&= S'^3T'S'^3T'S'^3T'^2(T'S')S'^2T'S'^3T'^2T'^4\\
&= S'^3T'^2S'^2T'S'^3T'^2T'^4\\
&= S'^3T'(T'S')S'T'S'^3T'^2T'^4\\
&= S'^3T'S'^3T'^2S'T'S'^3T'^2T'^4\\
&= S'^3T'S'^3T'(T'S')T'S'^3T'^2T'^4\\
&= S'^3T'S'^3T'S'^3T'^2T'S'^3T'^2T'^4\\
&= S'^3T'S^3T'S'^3T'^2(T'S')S'^2T'^2T'^4\\
&= S'^3T'^2S'^2T'^2T'^4\\
&= S'^3T'(T'S')S'T'^2T'^4\\
&= S'^3T'S'^3T'^2S'T'^2T'^4\\
&= S'^3T'S'^3T'(T'S')T'^2T'^4\\
&= S'^3T'S'^3T'S'^3T'^3T'^5.
\end{aligned}
$$

Wir erhalten also

$$T'S'T'S' = S'^9T'S'^3T'S^3T'^2S'^3T'S'^3T'S'^3T'^3S'^3T'S'^3T'S'^3T'^2$$
$$S'^3T'S'^3T'S'^3T'^2S'^3T'S'^3T'S'^3T'^3S'^3T'S'^3T'S'^3T'^2$$
$$S'^3T'S'^3T'S'^3T'^2S'^3T'S'^3T'S'^3T'^3T'^5. \qquad (26)$$

Die dritte Durchführung der Methode des vorlaufenden Substituierens, die identisch ist mit dem zweiten Substitutionsgang, umfaßt also $(3^2-1)3$ Substitutionen. Die Exponenten der Anfangsoperation S und der Endoperation T des resultierenden Ausdruckes, den wir mit A_3' bezeichnen, zeigen wiederum eine Erhöhung um 3 bez. 1.

Den Ausdruck A_3' legen wir der vierten Durchführung, die identisch ist mit dem dritten Substitutionsgang, zugrunde und erhalten nach $[(3^2-1)3-1]3$ Substitutionen den Ausdruck A_4':

$$T'S'T'S' = S'^{12}T'S'^3T'S'^3T'^2S'^3T'S'^3T'S'^3T'^3S'^3T'S'^3T'S'^3T'^2$$
$$S'^3T'S'^3T'S'^3T'^2S'^3T'S'^3T'S'^3T'^4S'^3T'S'^3T'S'^3T'^2$$
$$S'^3T'S'^3T'S'^3T'^2S'^3T'S'^3T'S'^3T'^3S'^3T'S'^3T'S'^3T'^2$$
$$S'^3T'S'^3T'S'^3T'^2S'^3T'S'^3T'S'^3T'^3S'^3T'S'^3T'S'^3T'^2$$
$$S'^3T'S'^3T'S'^3T'^2S'^3T'S'^3T'S^3T'^4S'^3T'S'^3T'S'^3T'^2$$
$$S'^3T'S'^3T'S'^3T'^2S'^3T'S'^3T'S'^3T'^3S'^3T'S'^3T'S'^3T'^2$$
$$S'^3T'S'^3T'S'^3T'^2S'^3T'S'^3T'S'^3T'^3S'^3T'S'^3T'S'^3T'^2$$
$$S'^3T'S'^3T'S'^3T'^2S'^3T'S'^3T'S'^3T'^4T'^6. \qquad (27)$$

Überblicken wir die erhaltenen Ausdrücke (24), (25), (26) und (27), so erkennen wir sofort eine gewisse Gesetzmäßigkeit. Führen wir nämlich folgende Abkürzungen ein:

$$\varphi_1' = S'^3T'$$
$$\varphi_2' = S'^3T'S'^3T'S'^3T'^2 \qquad (28)$$
$$\varphi_3' = S'^3T'S'^3T'S'^3T'^2\ S'^3T'S'^3T'S'^3T'^2\ S'^3T'S'^3T'S'^3T'^3$$
$$\varphi_4' = S'^3T'S'^3T'S'^3T'^2\ S'^3T'S'^3T'S'^3T'^2\ S'^3T'S'^3T'S'^3T'^3$$
$$S'^3T'S'^3T'S'^3T'^2\ S'^3T'S'^3T'S'^3T'^2\ S'^3T'S'^3T'S'^3T'^3$$
$$S'^3T'S'^3T'S'^3T'^2\ S'^3T'S'^3T'S'^3T'^2\ S'^3T'S'^3T'S'^3T'^4,$$

so gehen die Gleichungen (24), (25), (26) und (27) über in

$$T'S'T'S' = S'^3T'S'^3T'\varphi_1'^2T'^3 \qquad (24a)$$
$$T'S'T'S' = S'^6T'S'^3T'\varphi_1'T'\varphi_2'^2T'^4 \qquad (25a)$$
$$T'S'T'S' = S'^9T'S'^3T'\varphi_1'T'\varphi_2'T'\varphi_3'^2T'^5 \qquad (26a)$$
$$T'S'T'S' = S'^{12}T'S'^3T'\varphi_1'T'\varphi_2'T'\varphi_3'T'\varphi_4'^2T'^6. \qquad (27a)$$

Den Ausdruck A_4' legen wir der fünften Durchführung, die identisch mit dem vierten Substitutionsgang ist, zugrunde und erhalten nach $\{[(3^2-1)\,3-1]\,3-1\}\,3$ Substitutionen den Ausdruck A_5',

$$T'S'T'S' = S'^{15}T'S'^{3}T'\varphi_1'T'\varphi_2'T'\varphi_3'T'\varphi_4'T'\varphi_5'^{2}T'^{7}, \tag{29}$$

wobei wir setzen

$$\begin{aligned}
\varphi_5' = {} & S'^{3}T'S'^{3}T'S'^{3}T'^{2}S'^{3}T'S'^{3}T'S'^{3}T'^{2}S'^{3}T'S'^{3}T'S'^{3}T'^{3}\\
& S'^{3}T'S'^{3}T'S'^{3}T'^{2}S'^{3}T'S'^{3}T'S'^{3}T'^{2}S'^{3}T'S'^{3}T'S'^{3}T'^{3}\\
& S'^{3}T'S'^{3}T'S'^{3}T'^{2}S'^{3}T'S'^{3}T'S'^{3}T'^{2}S'^{3}T'S'^{3}T'S'^{3}T'^{4}\\
& S'^{3}T'S'^{3}T'S'^{3}T'^{2}S'^{3}T'S'^{3}T'S'^{3}T'^{2}S'^{3}T'S'^{3}T'S'^{3}T'^{3}\\
& S'^{3}T'S'^{3}T'S'^{3}T'^{2}S'^{3}T'S'^{3}T'S'^{3}T'^{2}S'^{3}T'S'^{3}T'S'^{3}T'^{3}\\
& S'^{3}T'S'^{3}T'S'^{3}T'^{2}S'^{3}T'S'^{3}T'S'^{3}T'^{2}S'^{3}T'S'^{3}T'S'^{3}T'^{4}\\
& S'^{3}T'S'^{3}T'S'^{3}T'^{2}S'^{3}T'S'^{3}T'S'^{3}T'^{2}S'^{3}T'S'^{3}T'S'^{3}T'^{3}\\
& S'^{3}T'S'^{3}T'S'^{3}T'^{2}S'^{3}T'S'^{3}T'S'^{3}T'^{2}S'^{3}T'S'^{3}T'S'^{3}T'^{3}\\
& S'^{3}T'S'^{3}T'S'^{3}T'^{2}S'^{3}T'S'^{3}T'S'^{3}T'^{2}S'^{3}T'S'^{3}T'S'^{3}T'^{5}.
\end{aligned} \tag{28a}$$

Überblicken wir die Formeln (28) und (28a), so erkennen wir zwischen den Operationen φ_1', φ_2', φ_3', φ_4', φ_5' sofort folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned}
\varphi_2' &= \varphi_1'^{3}T'\\
\varphi_3' &= \varphi_2'^{3}T'\\
\varphi_4' &= \varphi_3'^{3}T'\\
\varphi_5' &= \varphi_4'^{3}T'.
\end{aligned} \tag{30}$$

Jede der Operationen φ_1', φ_2', φ_3', φ_4', φ_5', die durch die Gleichungen (28) und (28a) definiert sind, läßt sich aus der vorhergehenden auf dieselbe Weise herleiten wie diese aus ihrer vorhergehenden. Die weiteren Durchführungen der Methode des vorlaufenden Substituierens ergeben die weiteren Operationen φ_6', φ_7' . . ., die, wie wir vermuten, und wie längere Rechnungen zeigen, denselben Gesetzen unterworfen sind.

Um weitere Beziehungen zwischen den Operationen φ_1', φ_2' . . . zu finden, liegt es nahe, die Ausdrücke $T'\varphi_1'$, $T'\varphi_2'$ . . . zu bilden und auf diese die Methode des vorlaufenden Substituierens anzuwenden. Durch Anwendung dieser Methode auf den Ausdruck $T'\varphi_1' = T'S'^{3}T'$, wobei wir zur Bildung der durch $S'^{3}T'^{2}$ zu ersetzenden Operationen $T'S'$ der Reihe nach die

sämtlichen Einzeloperationen S' der S'-Potenz-Operation des Ausdruckes $T'S'^3T'$ verwenden, erhalten wir

$$\begin{aligned} T'\varphi_1' &= S'^3T'^2S'^2T' \\ &= S'^3T'S'^3T'^2S'T' \\ &= S'^3T'S'^3T'S'^3T'^3. \end{aligned}$$

Setzen wir $\varphi_2' = S'^3T'S'^3T'S'^3T'^2$, so geht die letzte Gleichung über in

$$T'\varphi_1' = \varphi_2'T'. \tag{31}$$

Multiplizieren wir beide Seiten dieser Gleichung rechts mit T^{-1}, so erhalten wir

$$T'\varphi_1'T'^{-1} = \varphi_2'. \tag{32}$$

Der Ausdruck φ_2' entsteht also durch Transformation mit T'^{-1} aus dem Ausdruck φ_1'. Setzen wir in der Gleichung (31) für φ_2' den Wert aus der ersten Gleichung von (30) ein, so erhalten wir

$$T'\varphi_1' = \varphi_1'^3T'^2. \tag{33}$$

Der Ausdruck φ_1' gehorcht also einer der definierenden Relation völlig analogen Gleichung.

Zwischen den Ausdrücken φ_2' und φ_3' finden wir entsprechende Beziehungen, wenn wir die Methode des vorlaufenden Substituierens auf die Operation $T'\varphi_2' = T'S'^3T'S'^3T'S'^3T'^2$ anwenden, indem wir zur Bildung der durch $S'^3T'^2$ zu ersetzenden Operation $T'S'$ der Reihe nach die sämtlichen Einzeloperationen S' des Ausdruckes $T'S'^3T'S'^3T'S'^3T'^2$ verwenden. Wir erhalten:

$$T'\varphi_2' = S'^3T'S'^3T'S'^3T'^2S'^3T'S'^3T'S'^3T'^2S'^3T'S'^3T'S'^3T'^4.$$

Setzen wir auf Grund der Definitions-Gleichungen (28)

$$\varphi_3' = S'^3T'S'^3T'S'^3T'^2S'^3T'S'^3T'S'^3T'^2S'^3T'S'^3T'S'^3T'^3$$

so finden wir

$$T'\varphi_2' = \varphi_3'T'. \tag{31a}$$

Multiplizieren wir beide Seiten dieser Gleichung rechts mit T'^{-1}, so erhalten wir

$$T'\varphi_2'T'^{-1} = \varphi_3'. \tag{32a}$$

Der Ausdruck φ_3' entsteht also durch Transformation mit T'^{-1} aus dem Ausdruck φ_2'.

Setzen wir für φ_3' den Wert aus der zweiten Gleichung von (30) ein, so erhalten wir

$$T'\varphi_2' = \varphi_2'^3 T'^2. \tag{33a}$$

Der Ausdruck φ_2' gehorcht also ebenfalls einer der definierenden Relation $T'S' = S'^3 T'^2$ völlig analogen Gleichung.

Bis jetzt haben wir die Ausdrücke $\varphi_1', \varphi_2' \ldots \varphi_5'$ als Abkürzungen für die bei der Durchführung der Methode des vorlaufenden Substituierens erhaltenen Ausdrücke der Operationen S' und T' und also die Gleichungen (28) als Definitionsgleichungen der Ausdrücke $\varphi_1', \varphi_2' \ldots \varphi_5'$ aufgefaßt. Die Gleichungen (30), die uns die Beziehungen zwischen zwei benachbarten Ausdrücken φ' angeben, leiteten wir aus diesen Definitionsgleichungen ab. Für das folgende wollen wir nun aber die Betrachtungsweise umkehren und die Gleichungen (30), die wir noch durch die beiden Gleichungen

$$\varphi' = S'$$
$$\varphi_1' = \varphi'^3 T'$$

ergänzen, als Definitionsgleichungen auffassen. Die Bezeichnung $\varphi' = S'$ führen wir aus rein formalen Gründen ein. Das System der neuen Definitionsgleichungen lautet also:

$$\begin{aligned} \varphi' &= S' \\ \varphi_1' &= \varphi'^3 T' \\ \varphi_2' &= \varphi_1'^3 T' \\ \varphi_3' &= \varphi_2'^3 T' \\ &\cdots\cdots \\ \varphi_\nu' &= \varphi_{\nu-1}'^3 T'. \end{aligned} \tag{30a}$$

Durch diese Gleichungen haben wir auf einfache Weise die Ausdrücke $\varphi_1', \varphi_2' \ldots$ bis zu den höchsten Indizes definiert. Man erkennt auf den ersten Blick das zugrunde liegende Bildungsgesetz dieser Definitionsgleichungen. Jeder Ausdruck wird aus seinem vorhergehenden genau auf dieselbe Weise gebildet, wie dieser aus seinem vorhergehenden. Aus den Definitionsgleichungen (30a) lassen sich die Gleichungen (28) sofort ohne Hilfsbetrachtungen als Folgerungen herleiten. Diese neue

Auffassung hat den Vorteil, daß sich die Gleichungen (31), (32), (33) bez. (31a), (32a), (33a) und die entsprechenden Gleichungen mit höheren Indizes sehr einfach durch Anwendung der abgekürzten Methode des vorlaufenden Substituierens auf die Operationen $T'\varphi_1'$, $T'\varphi_2'$ . . . herleiten lassen. Die Anwendung auf den Ausdruck $T'\varphi_1' = T'S'^3T'$ gestaltet sich genau so wie früher und führt zu den Gleichungen (31), (32) und (33).

Auf die Operation $T'\varphi_2' = T'\varphi_1'^3T'$ läßt sich die Methode des vorlaufenden Substituierens in abgekürzter Form anwenden, indem wir anstatt der Substitutionen $T'S' = S'^3T'^2$ auf Grund der Gleichung (33) die Substitutionen $T\varphi_1' = \varphi_1'^3T'^2$ ausführen und zur Bildung der durch $\varphi_1'^3T'^2$ zu ersetzenden Operationen $T'\varphi_1'$ der Reihe nach die sämtlichen Einzeloperationen φ_1' des Ausdruckes $T'\varphi_1'^3T'$ verwenden. Wir erhalten

$$\begin{aligned} T'\varphi_2' &= (T'\varphi_1')\varphi_1'^2T' \\ &= \varphi_1'^3T'^2\varphi_1'^2T' \\ &= \varphi_1'^3T'(T'\varphi_1')\varphi_1'T' \\ &= \varphi_1'^3T'\varphi_1'^3T'^2\varphi_1'T' \\ &= \varphi_1'^3T'\varphi_1'^3T'(T'\varphi_1')T' \\ &= \varphi_1'^3T'\varphi_1'^3T'\varphi_1'^3T'T'^2. \end{aligned}$$

Auf Grund der Definitionsgleichungen geht die letzte Gleichung über in

$$T'\varphi_2' = \varphi_2'^3T'^2. \tag{33a}$$

Damit haben wir die Methode des vorlaufenden Substituierens an dem Ausdruck $T'\varphi_2' = T'\varphi_1'^3T'$ in der abgekürzten Form unter Anwendung von 3 Substitutionen $T'\varphi_1' = \varphi_1'^3T'^2$ durchgeführt. Jede explizit ausgeführte Substitution umfaßt implizit 3 Substitutionen $T'S' = S'^3T'^2$. Für $\varphi_2'^3T'$ setzen wir φ_3' und finden die Gleichungen (31a) und (32a)

$$T'\varphi_2' = \varphi_3'T' \tag{31a}$$

$$T'\varphi_2'T'^{-1} = \varphi_3'. \tag{32a}$$

Auf die Operation $T'\varphi_3' = T'\varphi_2'^3T'$ läßt sich die Methode des vorlaufenden Substituierens ebenfalls in abgekürzter Form anwenden, indem wir anstatt der Substitutionen $T'S' = S'^3T'^2$

die Substitutionen $T'\varphi_2' = \varphi_2'^3 T'^2$ ausführen und zur Bildung der durch $\varphi_2'^3 T'^2$ zu ersetzenden Operationen $T'\varphi_2'$ der Reihe nach die sämtlichen Einzeloperationen φ_2' des Ausdruckes $T'\varphi_2' T'$ verwenden. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} T'\varphi_3' &= (T'\varphi_2')\varphi_2'^2 T' \\ &= \varphi_2'^3 T'^2 \varphi_2'^2 T' \\ &= \varphi_2'^3 T' (T'\varphi_2')\varphi_2' T' \\ &= \varphi_2'^3 T' \varphi_2'^3 T'^2 \varphi_2' T' \\ &= \varphi_2'^3 T' \varphi_2'^3 T' (T'\varphi_2') T' \\ &= \varphi_2'^3 T' \varphi_2'^3 T' \varphi_2'^3 T' T'^2. \end{aligned}$$

Auf Grund der Definitionsgleichungen geht die letzte Gleichung über in

(33 b) $$T'\varphi_3' = \varphi_3'^3 T'^2.$$

Der Ausdruck φ_3' gehorcht also ebenfalls einer der definierenden Relation $T'S' = S'^3 T'^2$ völlig analogen Gleichung. Damit haben wir unter Anwendung der Substitutionen $T'\varphi_2' = \varphi_2'^3 T'^2$ die Methode des vorlaufenden Substituierens an dem Ausdruck $T'\varphi_2'^3 T'$ einmal durchgeführt. Jede explizit ausgeführte Substitution $T'\varphi_2' = \varphi_2'^3 T'^2$ umfaßt implizit 3 Substitutionen $T'\varphi_1' = \varphi_1'^3 T'^2$ bez. 3^2 Substitutionen $T'S' = S'^3 T'^2$. Setzen wir in der Gleichung (33 b) auf Grund der Definitionsgleichungen $\varphi_3'^3 T' = \varphi_4'$, so erhalten wir

(31 b) $$T'\varphi_3' = \varphi_4' T'$$

und

(32 b) $$T'\varphi_3' T'^{-1} = \varphi_4'.$$

Der Ausdruck φ_4' entsteht also durch Transformation mit T'^{-1} aus dem Ausdruck φ_3'.

Auf dieselbe Weise leiten wir die analogen Beziehungen für die Ausdrücke mit höheren Indizes ab. Die allgemeinen Gleichungen dieser Art lauten

(33 c) $$T'\varphi_n' = \varphi_n'^3 T'^2$$

(31 c) $$T'\varphi_n' = \varphi_{n+1}' T'$$

(32 c) $$T'\varphi_n' T'^{-1} = \varphi_{n+1}'.$$

Es erübrigt sich hier, die Richtigkeit dieser Gleichungen durch den Schluß von n auf $n+1$ unter Annahme der Richtigkeit der Gleichungen

$$T'\varphi_{n-1} = \varphi'^{3}_{n-1} T'^{2}$$
$$T'\varphi'_{n-1} = \varphi'_{n} T'$$
$$T'\varphi'_{n-1} T'^{-1} = \varphi'_{n}$$

nachzuweisen.

Satz XV: Die sämtlichen Ausdrücke φ', φ'_1, $\varphi'_2 \ldots$, die sich bei der Ausführung der Methode des vorlaufenden Substituierens ergeben haben und die durch die Gleichungen (30a) definiert sind, gehorchen also bestimmten Gleichungen, die der definierenden Relation $T'S' = S'^{3}T'^{2}$ völlig analog sind und lassen sich der Reihe nach durch Transformation mit T'^{-1} aus dem vorhergehenden Ausdruck ableiten.

Diese letztere Gesetzmäßigkeit der Herleitung der Ausdrücke φ', $\varphi'_1 \ldots$ aus dem vorhergehenden durch Transformation mit T'^{-1} ist äquivalent dem Bildungsgesetz, das dem System der Definitionsgleichungen zugrunde liegt, und könnte ebenso zur Definition der Ausdrücke φ', φ'_1, $\varphi'_2 \ldots$ benützt werden.

Es drängt sich uns nun die Frage auf, ob die Reihe der durch die Gleichungen (30a) definierten Ausdrücke φ', $\varphi'_1 \ldots$ eine endliche oder unendliche ist, und wieviel verschiedene Ausdrücke gegebenenfalls existieren. Zur Beantwortung dieser Frage gehen wir von der Gleichung (32) aus

$$\varphi'_2 = T'\varphi'_1 T'^{-1}. \tag{32}$$

Für φ'_1 setzen wir auf Grund der definierenden Relation $T'S' = S'^{3}T'^{2}$ und der Definitionsgleichungen

$$\varphi'_1 = T'\varphi' T'^{-1}.$$

Gleichung (32) geht dann über in

$$\varphi'_2 = T'^{2}\varphi' T'^{-2}.$$

Setzen wir diesen Ausdruck für φ'_2 in die Gleichung (32a) ein, so erhalten wir

$$\varphi'_3 = T'^{3}\varphi' T'^{-3}.$$

Fahren wir in dieser Weise fort, so erhalten wir folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned}\varphi_1' &= T'\varphi' T'^{-1}\\ \varphi_2' &= T'^2\varphi' T'^{-2}\\ \varphi_3' &= T'^3\varphi' T'^{-3}\\ \varphi_4' &= T'^4\varphi' T'^{-4}.\end{aligned} \tag{34}$$

Ist τ' die Ordnung der Operation T' so ist

$$\varphi_{\tau'}' = T'^{\tau'}\varphi' T'^{-\tau'}$$

also

$$\varphi_{\tau'}' = \varphi'. \tag{35}$$

Für die folgenden Ausdrücke $\varphi_{\tau'+1}'$, $\varphi_{\tau'+2}'$ ... erhalten wir

$$\begin{aligned}\varphi_{\tau'+1}' &= T'^{\tau'+1}\varphi' T'^{-(\tau'+1)}\\ &= T'\varphi' T'^{-1}\\ &= \varphi_1'.\end{aligned}$$

Analog finden wir

$$\begin{aligned}\varphi_{\tau'+2}' &= \varphi_2'\\ \varphi_{\tau'+3}' &= \varphi_3'\\ &\cdots\end{aligned}$$

Der Ausdruck $\varphi_{2\tau'}'$ ist

$$\varphi_{2\tau'}' = T'^{2\tau'}\varphi' T'^{-2\tau'}$$

also

$$\varphi_{2\tau'}' = \varphi'. \tag{35a}$$

Die folgenden Ausdrücke $\varphi_{2\tau'+1}'$, $\varphi_{2\tau'+2}'$ ... sind gleich

$$\begin{aligned}\varphi_{2\tau'+1}' &= \varphi_1'\\ \varphi_{2\tau'+2}' &= \varphi_2'.\end{aligned}$$

Allgemein gilt

$$\begin{aligned}\varphi_{\nu\tau'}' &= \varphi'\\ \varphi_{\nu\tau'+1}' &= \varphi_1'\end{aligned} \tag{35b}$$

wobei ν eine beliebige positive ganze Zahl bedeutet. Wir haben also folgenden Satz gefunden:

Satz XVa: Die Ausdrücke $\varphi, \varphi_1' \ldots$ haben τ' und nur τ' verschiedene Werte, und die gleichen Werte wiederholen sich periodisch mit der Periode τ'.

Wenn zwei Ausdrücke φ'_ν und φ'_μ einander gleich sind, so besteht zwischen den Indizes ν und μ die Kongruenz

$$\nu \equiv \mu \bmod \tau'. \tag{36}$$

Eine geringere Anzahl verschiedener Werte als τ' können die Ausdrücke $\varphi' \varphi'_1 \ldots$ nicht haben; denn wäre z. B.

$$\varphi'_\nu = \varphi',$$

wobei $\nu < \tau$ ist, so müßte, wie ohne weiteres ersichtlich ist, da wir (vergl. § 1, S. 5) die Komposition der Operation S' und der Potenzen von T' als nicht kommutativ voraussetzen, T'^ν gleich 1 sein, was aber einen Widerspruch bedeutet, da τ' die Ordnung der Operation T' bezeichnet und keine Potenz von T', deren Exponent kleiner als τ' ist, gleich der Identität sein kann.

Bevor wir weiter auf die Eigenschaften und die Bedeutung der Ausdrücke φ', $\varphi'_1 \ldots$ eingehen, führen wir die auf Seite 34 unterbrochene Methode des vorlaufenden Substituierens mit Hilfe der inzwischen gewonnenen Kenntnisse fort. Im Ausdruck A'_5 verwenden wir zur Bildung der durch $S'^3 T'^2$ zu ersetzenden Operationen $T'S'$ zunächst die drei Operationen S' des Ausdruckes S'^3. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
T'S'\,T'S' &= S'^{15}(T'S')\,S'^2 T'\varphi'_1 T'\varphi'^2_2 T'\varphi'^3_3 T'\varphi'^4_4 T'\varphi'^2_5 T'^7 \\
&= S'^{18} T'^2 S'^2 T'\varphi'_1 T'\varphi'^2_2 T'\varphi'^3_3 T'\varphi'^4_4 T'\varphi'^2_5 T'^7 \\
&= S'^{18} T'(T'S')S'\,T'\varphi'_1 T'\varphi'^2_2 T'\varphi'^3_3 T'\varphi'^4_4 T'\varphi'^2_5 T'^7 \\
&= S'^{18} T'S'^3 T'^2 S'\,T'\varphi'_1 T'\varphi'^2_2 T'\varphi'^3_3 T'\varphi'^4_4 T'\varphi'^2_5 T'^7 \\
&= S'^{18} T'S'^3 T'(T'S')\,T'\varphi'_1 T'\varphi'^2_2 T'\varphi'^3_3 T'\varphi'^4_4 T'\varphi'^2_5 T'^7 \\
&= S'^{18} T'S'^3 T'S'^3 T'^2 T'\varphi'_1 T'\varphi'^2_2 T'\varphi'^3_3 T'\varphi'^4_4 T'\varphi'^2_5 T'^7.
\end{aligned} \tag{37}$$

Die weitere Durchführung der Methode des vorlaufenden Substituieres erfolgt in abgekürzter Form, indem wir anstatt der Substitutionen $T'S' = S'^3 T'^2$ die Substitutionen $T'\varphi'_1 = \varphi'^3_1 T'^2$, $T'\varphi'_2 = \varphi'^3_2 T'^2 \ldots$ ausführen und zur Bildung der durch $\varphi'^3_1 T'^2$, $\varphi'^3_2 T'^2 \ldots$ zu ersetzenden Operationen $T'\varphi'_1$, $T'\varphi'_2 \ldots$ der Reihe nach die Operationen φ'_1, $\varphi'_2 \ldots$ des Ausdruckes A'_5 verwenden. Wir erhalten:

$$T'S'T'S'$$
$$= S'^{18}T'S'^{3}T'S'^{3}T'^{2}(T'\varphi_1')T'\varphi_2'T'\varphi_3'T'\varphi_4'T'\varphi_5'^{2}T'^{7}$$
$$= S'^{18}T'S'^{3}T'S'^{3}T'^{2}\varphi_1'^{3}T'^{2}T'\varphi_2'T'\varphi_3'T'\varphi_4'T'\varphi_5'^{2}T'^{7}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$= S'^{18}T'S'^{3}T'S'^{3}T'^{2}\varphi_1'^{3}T'^{2}\varphi_2'^{3}T'^{2}\varphi_3'^{3}T'^{2}\varphi_4'^{3}T'^{2}\varphi_5'^{3}T'^{2}\varphi_5'^{3}T'^{2}T'^{7}.$$

Unter Benutzung der Definitionsgleichungen geht dieser Ausdruck über in den Ausdruck A_6'

$$T'S'T'S' = S'^{18}T'S'^{3}T'\varphi_1'T'\varphi_2'T'\varphi_3'T'\varphi_4'T'\varphi_5'T'\varphi_6'^{2}T'^{8}.$$

Damit haben wir die Methode des vorlaufenden Substituierens unter Anwendung von

$$(\{[(3^2-1)3-1]3-1\}3-1)3 = 3+3+3^2+3^3+3^4+3^5+3^5$$
$$= 3^6 - \frac{3^5-3}{2}$$

explizit bez. implizit ausgeführten Substitutionen $T'S' = S'^{3}T'^{2}$ zum sechsten Mal durchgeführt. Die erste Form des Ausdruckes für die Anzahl der explizit bez. implizit ausgeführten Substitutionen ergibt sich aus den allgemeinen Betrachtungen des § 6, die zweite Form aus den Betrachtungen der abgekürzten Ausführung der Methode des vorlaufenden Substituierens.

Mit Hilfe des Schlusses von $n-1$ auf n, dessen Ausführung wir uns hier ersparen, da sie vollständig analog der sechsten Durchführung der Methode des vorlaufenden Substituierens ist, können wir streng zeigen, daß wir nach n Durchführungen der Methode des vorlaufenden Substituierens bez. $n-1$ Substitutionsgängen zu der Gleichung gelangen

(38) $$T'S'T'S' = S'^{3n}T'S'^{3}T'\varphi_1'T'\varphi_2'T'\varphi_3'T'\ldots\varphi_{n-1}'T'\varphi_n'^{2}T'^{n+2}.$$

Dabei umfaßt die $n$te Durchführung der Methode

$$3^n - \frac{3^{n-1}-3}{2}$$

explizit bez. implizit ausgeführte Substitutionen $T'S' = S'^{3}T'^{2}$.

Die Gleichung (38) können wir noch auf eine andere Form bringen. Auf Grund der Gleichungen (35) und (35a) und der aus ihnen gezogenen Folgerungen gilt die folgende Gleichung

(39) $$\varphi_1'T'\varphi_2'T'\ldots\varphi_{\nu\tau}'T' = (\varphi_1'T'\varphi_2'T'\ldots\varphi_{\tau}'T')^{\nu},$$

wobei τ' die Ordnung der Operation T' und ν eine beliebige positive ganze Zahl bedeutet.

Setzen wir in der Gleichung (38)

$$n = \nu\tau' + 1$$

so erhalten wir

$$T'S' \cdot T'S' = S'^{3(\nu\tau'+1)} T'S'^{3} T'(\varphi_1' T' \varphi_2' T' \dots \varphi_{\tau'} T')^{\nu} \varphi^{2}_{\nu\tau'+1} T'^{\nu\tau'+3}. \quad (38a)$$

Der Ausdruck $\varphi'_{\nu\tau+1}$ ist nach (35b) gleich φ_1', die Operation $T'^{\nu\tau'+3}$ reduziert sich, da τ' die Ordnung von T' bedeutet, auf T'^{3}. Die Gleichung (38a) erhält also die Form

$$T'S'T'S' = S'^{3(\nu\tau'+1)} T'S'^{3} T'(\varphi_1' T' \varphi_2' T' \dots \varphi_{\tau'}' T')^{\nu} \varphi_1'^{2} T'^{3}. \quad (38b)$$

Aus der Gleichung (38b) lassen sich eine Reihe interessanter Schlüsse ziehen, die teils bekannte, teils neue Tatsachen enthalten. Wir wollen dies jedoch erst später tun.

§ 8. Herleitung der Ausdrücke φ', φ_1', φ_2' ... und ihrer Beziehungen durch Transformieren der definierenden Relation $T'S' = S'^{3}T'^{2}$.

Die Ausdrücke φ', φ_1', φ_2' ... und ihre gegenseitigen Beziehungen, die wir durch Anwendung der Methode des vorlaufenden Substituierens gewonnen haben, lassen sich auch direkt aus der definierenden Relation $T'S' = S'^{3}T'^{2}$ durch Vornahme gewisser Transformationen herleiten. Wir multiplizieren zu diesem Ende beide Seiten der definierenden Relation $T'S' = S'^{3}T'^{2}$ rechts mit T'^{-1} und erhalten:

$$T'S'T'^{-1} = S'^{3}T'$$

Setzen wir

$$\varphi' = S'$$
$$\varphi_1' = \varphi'^{3} T',$$

so geht die letzte Gleichung über in

$$T'\varphi' T'^{-1} = \varphi_1'.$$

Beide Seiten dieser Gleichung multiplizieren wir dreimal mit sich selbst, d. h. wir potenzieren mit 3 und erhalten die Gleichung

$$T'\varphi'^{3} T'^{-1} = \varphi_1'^{3}.$$

Durch Multiplikation beider Seiten rechts mit T' geht diese Gleichung über in

$$T'\varphi'^3 T' T'^{-1} = \varphi_1'^3 T'.$$

Setzen wir

$$\varphi_2' = \varphi_1'^3 T',$$

so finden wir, da $\varphi'^3 T' = \varphi_1'$ ist,

$$T'\varphi_1' T'^{-1} = \varphi_2'.$$

Potenzieren wir beide Seiten dieser Gleichung wiederum mit drei, multiplizieren beide Seiten rechts mit T' und setzen

$$\varphi_3' = \varphi_2'^3 T',$$

so erhalten wir

$$T'\varphi_2' T'^{-1} = \varphi_3'.$$

In dieser Weise können wir nun fortfahren und gelangen zu dem Satze:

Definieren wir die Ausdrücke φ', $\varphi_1' \ldots$ durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} \varphi' &= S' \\ \varphi_1' &= \varphi'^3 T' \\ \varphi_2' &= \varphi_1'^3 T' \\ &\cdots\cdots \\ \varphi_\nu' &= \varphi_{\nu-1}'^3 T', \end{aligned}$$

so gelten zwischen je zwei benachbarten Ausdrücken die Gleichungen

$$\begin{aligned} T'\varphi' T'^{-1} &= \varphi_1' \\ T'\varphi_1' T'^{-1} &= \varphi_2' \\ T'\varphi_2' T'^{-1} &= \varphi_3' \\ &\cdots\cdots \\ T'\varphi_{\nu-1}' T'^{-1} &= \varphi_\nu'. \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen leiten wir sofort, indem wir beide Seiten der Gleichungen rechts mit T' multiplizieren, die folgenden Gleichungen her:

$$\begin{aligned} T'\varphi' &= \varphi_1' T' \\ T'\varphi_1' &= \varphi_2' T' \\ T'\varphi_2' &= \varphi_3' T' \\ &\cdots\cdots \\ T'\varphi_{\nu-1}' &= \varphi_\nu' T'. \end{aligned}$$

Durch Einsetzen der Werte aus den Definitionsgleichungen für die Operationen $\varphi_1', \varphi_2' \ldots$ erhalten wir aus den letzten Gleichungen die der definierenden Relation $T'S' = S'^3 T'^2$ entsprechenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} T'\varphi' &= \varphi'^3 T'^2 \\ T'\varphi_1' &= \varphi_1'^3 T'^2 \\ T'\varphi_2' &= \varphi_2'^3 T'^2 \\ &\cdots\cdots \\ T'\varphi_\nu' &= \varphi_\nu'^3 T'^2. \end{aligned}$$

§ 9. Anwendung der Methode des vorlaufenden Substituierens auf die durch die allgemeinen Gleichungen $TS = S^k T^l$, $S^\sigma = 1$, $T^\tau = 1$ definierte Gruppe.

Die Anwendung der Methode des vorlaufenden Substituierens auf die durch die allgemeinen Gleichungen

$$\begin{aligned} TS &= S^k T^l \\ S^\sigma &= 1 \\ T^\tau &= 1 \end{aligned}$$

definierte Gruppe führt ebenfalls zu gewissen Operationen, die den Operationen φ', φ_1', $\varphi_2' \ldots$ analog sind und die wir mit $\varphi, \varphi_1, \varphi_2 \ldots$ bezeichnen wollen. Bevor wir an die Durchführung der Methode des vorlaufenden Substituierens herantreten, untersuchen wir erst die Ausdrücke $\varphi, \varphi_1, \varphi_2 \ldots$ und ihre Beziehungen. Wir definieren die Ausdrücke $\varphi, \varphi_1 \ldots$ durch die Gleichungen, deren Bildungsgesetz ohne weiteres klar ist:

$$\begin{aligned} \varphi &= S \\ \varphi_1 &= \varphi^k T^{l-1} \\ \varphi_2 &= \varphi_1^k T^{l-1} \\ \varphi_3 &= \varphi_2^k T^{l-1} \\ &\cdots\cdots \\ \varphi_\nu &= \varphi_{\nu-1}^k T^{l-1}. \end{aligned} \tag{40}$$

Aus diesen Definitionsgleichungen ergeben sich sofort die Ausdrücke in den Operationen S und T

$$
\begin{aligned}
&\varphi = S \\
&\varphi_1 = S^k T^{l-1} \\
(41)\qquad &\varphi_2 = (S^k T^{l-1})^k T^{l-1} \\
&\varphi_3 = [(S^k T^{l-1})^k T^{l-1}]^k T^{l-1} \\
&\varphi_4 = \{[(S^k T^{l-1})^k T^{l-1}]^k T^{l-1}\}^k T^{l-1}.
\end{aligned}
$$

Die Beziehungen zwischen den Größen φ, φ_1, φ_2 ... leiten wir zunächst wiederum wie bei den Ausdrücken φ', φ_1', φ_2' ... durch Anwendung der Methode des vorlaufenden Substituierens auf die aus den Definitionsgleichungen (40) durch linksseitige Multiplikation mit T sich ergebenden Gleichungen

$$
\begin{aligned}
T\varphi_1 &= TS^k T^{l-1} \\
T\varphi_2 &= T\varphi_1^k T^{l-1} \\
&\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

her. Die Beziehungen zwischen den Operationen φ und φ_1 ergeben sich direkt aus der definierenden Relation $TS = S^k T^l$ unter Benützung der ersten beiden Definitionsgleichungen (40) bez. durch rechtsseitige Multiplikation beider Seiten der definierenden Relation mit T^{-1}. Wir erhalten

$$T\varphi = \varphi^k T^{l-1} \tag{42}$$

$$T\varphi = \varphi_1 T \tag{43}$$

$$T\varphi T^{-1} = \varphi_1. \tag{44}$$

Der Ausdruck φ_1 entsteht also durch Transformation mit T^{-1} aus dem Ausdruck φ.

Um die Beziehungen zwischen den Ausdrücken φ_1 und φ_2 zu finden, gehen wir von der aus der zweiten Definitionsgleichung durch linksseitiges Multiplizieren mit T folgenden Gleichung

$$T\varphi_1 = TS^k T^{l-1}$$

aus und führen in dem Ausdruck $TS^k T^{l-1}$ die Methode des vorlaufenden Substituierens einmal durch, indem wir zur Bildung der durch $S^k T^l$ zu ersetzenden Operationen TS der Reihe nach die sämtlichen k Einzeloperationen S verwenden. Wir erhalten

$$
\begin{aligned}
T\varphi_1 &= (TS)S^{k-1}T^{l-1} \\
&= S^k T^l S^{k-1} T^{l-1} \\
&= S^k T^{l-1}(TS) S^{k-2} T^{l-1} \\
&= S^k T^{l-1} S^k T^l S^{k-2} T^{l-1} \\
&= S^k T^{l-1} S^k T^{l-1}(TS) S^{k-3} T^{l-1} \\
&= S^k T^{l-1} S^k T^{l-1} S^k T^l S^{k-3} T^{l-1}.
\end{aligned}
$$

Nach k Substitutionen $TS = S^k T^l$ erhalten wir die Gleichung

$$T\varphi_1 = (S^k T^{l-1})^k T^l,$$

die unter Benützung der zweiten Definitionsgleichung (40) in die Form übergeht

$$T\varphi_1 = \varphi_1^k T^l. \tag{42a}$$

Der Ausdruck φ_1 gehorcht also einer der definierenden Relation völlig analogen Gleichung.

Für $\varphi_1^k T^{l-1}$ setzen wir auf Grund der Definitionsgleichungen φ_2 und erhalten

$$T\varphi_1 = \varphi_2 T. \tag{43a}$$

Multiplizieren wir beide Seiten dieser Gleichung rechts mit T^{-1}, so finden wir

$$T\varphi_1 T^{-1} = \varphi_2. \tag{44a}$$

Der Ausdruck φ_2 entsteht also durch Transformation mit T^{-1} aus dem Ausdruck φ_1.

Um die Beziehungen zwischen den Operationen φ_2 und φ_3 herzuleiten, gehen wir aus von der Gleichung

$$T\varphi_2 = T\varphi_1^k T^{l-1}$$

und führen in dem Ausdruck $T\varphi_1^k T^{l-1}$ unter Anwendung der Substitution

$$T\varphi_1 = \varphi_1^k T^l$$

die Methode des vorlaufenden Substituierens in der abgekürzten Form durch, indem wir zur Bildung der durch $\varphi_1^k T^l$ zu ersetzenden Operationen $T\varphi_1$ die sämtlichen Operationen φ_1 der Potenz-Operation φ_1^k verwenden. Wir sehen ohne weiteres, daß jede explizit ausgeführte Substitution $T\varphi_1 = \varphi_1^k T^l$ implizit k Substitutionen $TS = S^k T^l$ umfaßt. Wir erhalten:

$$
\begin{aligned}
T\varphi_2 &= (T\varphi_1)\varphi_1^{k-1}T^{l-1} \\
&= \varphi_1^k T^l \varphi_1^{k-1} T^{l-1} \\
&= \varphi_1^k T^{l-1}(T\varphi_1)\varphi_1^{k-2} T^{l-1} \\
&= \varphi_1^k T^{l-1}\varphi_1^k T^l \varphi_1^{k-2} T^{l-1} \\
&= \varphi_1^k T^{l-1}\varphi_1^k T^{l-1}(T\varphi_1)\varphi_1^{k-3} T^{l-1} \\
&= \varphi_1^k T^{l-1}\varphi_1^k T^{l-1}\varphi_1^k T^l \varphi_1^{k-3} T^{l-1}.
\end{aligned}
$$

Nach k explizit ausgeführten Substitutionen $T\varphi_1 = \varphi_1^k T^l$ bez. k^2 implizit ausgeführten Substitutionen $TS = S^k T^l$ erhalten wir die Gleichung

$$T\varphi_2 = (\varphi_1^k T^{l-1})^k T^l.$$

Diese Gleichung geht unter Benützung der dritten Definitionsgleichung (40) über in

(42b) $$T\varphi_2 = \varphi_2^k T^l.$$

Der Ausdruck φ_2 gehorcht also wiederum einer der definierenden Relation völlig analogen Gleichung. Setzen wir für $\varphi_2^k T^{l-1}$ auf Grund der Definitionsgleichungen φ_3, so erhalten wir

(43b) $$T\varphi_2 = \varphi_3 T.$$

Durch rechtsseitige Multiplikation beider Seiten mit T^{-1} geht diese Gleichung über in

$$T\varphi_2 T^{-1} = \varphi_3.$$

Der Ausdruck φ_3 entsteht also aus dem Ausdruck φ_2 durch Transformation mit T^{-1}.

Um allgemein die Beziehungen zwischen den Ausdrücken φ_n und φ_{n+1} herzuleiten, setzen wir die Gleichung

$$T\varphi_{n-1} = \varphi_{n-1}^k T^l$$

als richtig voraus und führen die Methode des vorlaufenden Substituierens in der abgekürzten Form unter Anwendung der Substitution $T\varphi_{n-1} = \varphi_{n-1}^k T^l$ an dem aus der $(n+1)$ten Definitionsgleichung (50) sich ergebenden Ausdruck

$$T\varphi_n = T_{n-1}^k T^{l-1}$$

einmal durch, indem wir zur Bildung der durch $\varphi_{n-1}^k T^l$ zu ersetzenden Operation $T\varphi_{n-1}$ die sämtlichen k Operationen φ_{n-1}

verwenden. Jede explizit ausgeführte Substitution $T\varphi_{n-1} = \varphi_{n-1}^k T^l$ umfaßt implizit k Substitutionen $T\varphi_{n-2} = \varphi_{n-2}^k T^l$, bez. k^2 Substitutionen $T\varphi_{n-3} = \varphi_{n-3}^k T^l \ldots$ bez. k^{n-1} Substitutionen $TS = S^k T^l$. Wir erhalten nach k explizit ausgeführten Substitutionen $T\varphi_{n-1} = \varphi_{n-1}^k T^l$ bez. k^n implizit ausgeführten Substitutionen $TS = S^k T^l$ die Gleichung

$$T\varphi_n = (\varphi_{n-1}^k T^{l-1})^k T^l,$$

die unter Benützung der $(n+1)$ten Definitionsgleichung übergeht in

$$T\varphi_n = \varphi_n^k T^l. \tag{42c}$$

Die allgemeine Operation φ_n gehorcht also ebenfalls einer der definierenden Relation völlig analogen Gleichung. Aus der Gleichung (42c) erhalten wir durch Anwendung der $(n+2)$ten Definitionsgleichung (40) die Gleichung

$$T\varphi_n = \varphi_{n+1} T, \tag{43c}$$

aus der wir durch Multiplikation rechts mit T^{-1} die Gleichung

$$T\varphi_n T^{-1} = \varphi_{n+1} \tag{44c}$$

herleiten. Die allgemeine Operation φ_{n+1} läßt sich aus der vorhergehenden Operation φ_n durch Transformation mit T^{-1} herleiten.

Wir können also jetzt folgenden Satz aussprechen:

Satz XVI. Die sämtlichen Operationen φ, φ_1, $\varphi_2 \ldots$, die sich durch Anwendung der Methode des vorlaufenden Substituierens auf die durch die Gleichungen

$$TS = S^k T^l$$
$$S^\sigma = 1$$
$$T^\tau = 1$$

definierte Gruppe unter Benützung des Ausdruckes $S^k T^l S^k T^l$ als Ausgangsoperation ergeben und die durch die Gleichungen (40) definiert sind, gehorchen bestimmten der definierenden Relation $TS = S^k T^l$ völlig analogen Gleichungen und lassen sich der Reihe nach durch Transformation mit T^{-1} aus der vorhergehenden Operation herleiten.

Die letztere Gesetzmäßigkeit ist äquivalent dem Bildungsgesetz, das den Definitionsgleichungen (40) zugrunde liegt, und könnte ebenfalls zur Definition der Operationen $\varphi, \varphi_1, \varphi_2 \ldots$ verwendet werden.

Es taucht nun die Frage auf, ob die Reihe der Operationen $\varphi, \varphi_1, \varphi_2 \ldots$ eine unendliche ist, oder ob die Verhältnisse ähnlich liegen wie bei den Operationen $\varphi', \varphi_1', \varphi_2' \ldots$ Zu diesem Zwecke setzen wir in der Gleichung (44a) für φ_1 den Wert aus (44) ein, wodurch wir die Gleichung

(45) $$T^2 \varphi T^{-2} = \varphi_2$$

erhalten. Diesen Wert setzen wir in die Gleichung (44b) ein und finden

(45a) $$T^3 \varphi T^{-3} = \varphi_3.$$

Fahren wir in dieser Weise fort, so erhalten wir für φ_n den Wert

(45b) $$T^n \varphi T^{-n} = \varphi_n.$$

Wir sehen also:

Satz XVIa: Die Reihe der Operationen $\varphi, \varphi_1 \ldots$ enthält τ und nur τ verschiedene Operationen, wobei τ die Ordnungszahl der Operation T bedeutet.

Es ist

(45c)
$$\begin{aligned} T^{\tau} \varphi T^{-\tau} &= \varphi_{\tau} = \varphi \\ T^{\tau+1} \varphi T^{-(\tau+1)} &= \varphi_{\tau+1} = \varphi_1 \\ &\ldots\ldots\ldots \\ T^{2\tau} \varphi T^{-2\tau} &= \varphi_{2\tau} = \varphi \\ T^{2\tau+1} \varphi T^{-(2\tau+1)} &= \varphi_{2\tau+1} = \varphi_1 \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Eine geringere Anzahl verschiedener Werte kann die Reihe $\varphi, \varphi_1 \ldots$ auf Grund analoger Betrachtungen wie früher nicht haben. Die gleichen Werte wiederholen sich periodisch mit der Periode τ. Wenn zwei Ausdrücke φ_μ und φ_ν gleich sind, so besteht die Kongruenz

$$\nu \equiv \mu \bmod \tau.$$

Mit Hilfe der Ausdrücke $\varphi, \varphi_1 \ldots$ und ihrer Beziehungen gestaltet sich die Durchführung der Methode des vorlaufenden Substituierens sehr einfach. Wir gehen wiederum von der Gleichung

$$TSTS = S^k T^l S^k T^l$$

aus und führen die Methode des vorlaufenden Substituierens unter Anwendung der Substitution $TS = S^k T^l$ an dem Ausdruck $S^k T^l S^k T^l$, den wir mit A bezeichnen, durch, indem wir zur Bildung der durch $S^k T^l$ zu ersetzenden Operation TS die sämtlichen Operationen S des zweiten Ausdruckes S^k verwenden. Wir erhalten folgende Gleichungen

$$\begin{aligned} TS\,TS &= S^k T^{l-1}(TS) S^{k-1} T^l \\ &= S^k T^{l-1} S^k T^l S^{k-1} T^l \\ &= S^k T^{l-1} S^k T^{l-1}(TS) S^{k-2} T^l \\ &= S^k T^{l-1} S^k T^{l-1} S^k T^l S^{k-2} T^l. \end{aligned}$$

Nach k Substitutionen erhalten wir

$$TSTS = S^k T^{l-1} S^k T^{l-1} (S^k T^{l-1})^{k-1} T^{l+1}. \tag{46}$$

Setzen wir auf Grund der Definitionsgleichungen $S^k T^{l-1} = \varphi_1$, so geht Gleichung (46) über in

$$TSTS = S^k T^{l-1} S^k T^{l-1} \varphi_1^{k-1} T^{l+1}. \tag{46a}$$

Die erste Durchführung der Methode des vorlaufenden Substituierens, die zu dem Ausdruck A_1 (46a) führt, umfaßt also k Substitutionen $TS = S^k T^l$.

Der zweiten Durchführung der Methode des vorlaufenden Substituierens legen wir den Ausdruck A_1 zugrunde und führen zunächst k Substitutionen $TS = S^k T^l$ explizit aus, indem wir zur Bildung der durch $S^k T^l$ zu ersetzenden Operation TS die Einzeloperationen S der an zweiter Stelle stehenden S-Potenz-Operation verwenden. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} TSTS &= S^k T^{l-2}(TS) S^{k-1} T^{l-1} \varphi_1^{k-1} T^{l+1} \\ &= S^k T^{l-2} S^k T^l S^{k-1} T^{l-1} \varphi_1^{k-1} T^{l+1} \\ &= S^k T^{l-2} S^k T^{l-1}(TS) S^{k-2} T^{l-1} \varphi_1^{k-1} T^{l+1} \\ &= S^k T^{l-2} S^k T^{l-1} S^k T^l S^{k-2} T^{l-1} \varphi_1^{k-1} T^{l+1}. \end{aligned}$$

Nach k Substitutionen erhalten wir

$$= S^k T^{l-2} S^k T^{l-1} (S^k T^{l-1})^{k-1} T^l \varphi_1^{k-1} T^{l+1}.$$

Die weiteren Substitutionen führen wir in der abgekürzten Form aus, indem wir anstatt $TS = S^k T^l$ $T\varphi_1 = \varphi_1^k T^l$ substituieren und zur Bildung der durch $\varphi_1^k T^l$ zu ersetzenden Operationen $T\varphi_1$

der Reihe nach die $k-1$ Operationen φ_1 der Potenz-Operation φ_1^{k-1} verwenden. Wir erhalten

$$\begin{aligned} TS \cdot TS &= S^k T^{l-2} S^k T^{l-1} (S^k T^{l-1})^{k-1} T^{l-1} (T\varphi_1) \varphi_1^{k-2} T^{l+1} \\ &= S^k T^{l-2} S^k T^{l-1} (S^k T^{l-1})^{k-1} T^{l-1} \varphi_1^k T^l \varphi_1^{k-2} T^{l+1} \\ &= S^k T^{l-2} S^k T^{l-1} (S^k T^{l-1})^{k-1} T^{l-1} \varphi_1^k T^{l-1} (T\varphi_1) \varphi_1^{k-3} T^{l+1} \\ &= S^k T^{l-2} S^k T^{l-1} (S^k T^{l-1})^{k-1} T^{l-1} \varphi_1^k T^{l-1} \varphi_1^k T^l \varphi_1^{k-3} T^{l+1} \\ &\quad \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\ &= S^k T^{l-2} S^k T^{l-1} (S^k T^{l-1})^{k-1} T^{l-1} (\varphi_1^k T^{l-1})^{k-1} T^{l+2}. \end{aligned}$$

Unter Benützung der zweiten und dritten Definitionsgleichung erhalten wir aus dieser Gleichung

$$TSTS = S^k T^{l-2} S^k T^{l-1} \varphi_1^{k-1} T^{l-1} \varphi_2^{k-1} T^{l+2}. \tag{46b}$$

Damit haben wir zum zweiten Male und zwar unter Anwendung von $k + k(k-1) = k^2$ explizit bez. implizit ausgeführten Substitutionen $TS = S^k T^l$ vorlaufend substituiert.

Nach denselben Prinzipien führen wir an dem zuletzt gewonnenen Ausdruck (46b), den wir mit A_2 bezeichnen, die Methode des vorlaufenden Substituierens durch. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} TSTS &= S^k T^{l-3} (TS) S^{k-1} T^{l-1} \varphi_1^{k-1} T^{l-1} \varphi_2^{k-1} T^{l+2} \\ &= S^k T^{l-3} S^k T^l S^{k-1} T^{l-1} \varphi_1^{k-1} T^{l-1} \varphi_2^{k-1} T^{l+2} \\ &= S^k T^{l-3} S^k T^{l-1} (TS) S^{k-2} T^{l-1} \varphi_1^{k-1} T^{l-1} \varphi_2^{k-1} T^{l+2} \\ &= S^k T^{l-3} S^k T^{l-1} S^k T^l S^{k-2} T^{l-1} \varphi_1^{k-1} T^{l-1} \varphi_2^{k-1} T^{l+2}. \end{aligned}$$

Nach k Substitutionen erhalten wir

$$= S^k T^{l-3} S^k T^{l-1} (S^k T^{l-1})^{k-1} T^l \varphi_1^{k-1} T^{l-1} \varphi_2^{k-1} T^{l+2}.$$

Die weiteren Substitutionen führen wir in abgekürzter Form aus, indem wir anstatt $TS = S^k T^l$ $T\varphi_1 = \varphi_1^k T^l$ bez. $T\varphi_2 = \varphi_2^k T^l$ substituieren und zur Bildung der durch $\varphi_1^k T^l$ bez. $\varphi_2^k T^l$ zu ersetzenden Operationen $T\varphi_1$ bez. $T\varphi_2$ der Reihe nach die sämtlichen Einzeloperationen φ_1 bez. φ_2 der Potenz-Operationen φ_1^{k-1} bez. φ_2^{k-1} verwenden. Die Ausführung der Substitutionen $T\varphi_1 = \varphi_1^k T^l$ ergibt:

$$\begin{aligned} TSTS &= S^k T^{l-3} S^k T^{l-1} (S^k T^{l-1})^{k-1} T^{l-1} (T\varphi_1) \varphi_1^{k-2} T^{l-1} \varphi_2^{k-1} T^{l+2} \\ &= S^k T^{l-3} S^k T^{l-1} (S^k T^{l-1})^{k-1} T^{l-1} \varphi_1^k T^l \varphi_1^{k-2} T^{l-1} \varphi_2^{k-1} T^{l+2} \\ &= S^k T^{l-3} S^k T^{l-1} (S^k T^{l-1})^{k-1} T^{l-1} \varphi_1^k T^{l-1} (T\varphi_1) \varphi_1^{k-3} T^{l-1} \varphi_2^{k-1} T^{l+2} \\ &= S^k T^{l-3} S^k T^{l-1} (S^k T^{l-1})^{k-1} T^{l-1} \varphi_1^k T^{l-1} \varphi_1^k T^l \varphi_1^{k-3} T^{l-1} \varphi_2^{k-1} T^{l+2}. \end{aligned}$$

Nach $k+1$ Substitutionen $T\varphi_1 = \varphi_1^k T^l$ erhalten wir

$$= S^k T^{l-3} S^k T^{l-1} (S^k T^{l-1})^{k-1} T^{l-1} (\varphi_1^k T^{l-1})^{k-1} T^{l-1} \varphi_2^{k-1} T^{l+2}.$$

Die Ausführung der Substitutionen $T\varphi_2 = \varphi_2^k T^l$ ergibt

$TSTS$

$$= S^k T^{l-3} S^k T^{l-1} (S^k T^{l-1})^{k-1} T^{l-1} (\varphi_1^k T^{l-1})^{k-1} T^{l-1} (T\varphi_2) \varphi_2^{k-2} T^{l+2}$$

$$= S^k T^{l-3} S^k T^{l-1} (S^k T^{l-1})^{k-1} T^{l-1} (\varphi_1^k T^{l-1})^{k-1} T^{l-1} \varphi_2^k T^l \varphi_2^{k-2} T^{l+2}$$

$$= S^k T^{l-3} S^k T^{l-1} (S^k T^{l-1})^{k-1} T^{l-1} (\varphi_1^k T^{l-1})^{k-1} T^{l-1} \varphi_2^k T^{l-1} (T\varphi_2) \varphi_2^{k-3} T^{l+2}$$

$$= S^k T^{l-3} S^k T^{l-1} (S^k T^{l-1})^{k-1} T^{l-1} (\varphi_1^k T^{l-1})^{k-1} T^{l-1} \varphi_2^k T^{l-1} \varphi_2^k T^l \varphi_2^{k-3} T^{l+2}.$$

Nach $k-1$ Substitutionen $T\varphi_2 = \varphi_2^k T^l$ erhalten wir

$$= S^k T^{l-3} S^k T^{l-1} (S^k T^{l-1})^{k-1} T^{l-1} (\varphi_1^k T^{l-1})^{k-1} T^{l-1} (\varphi_2^k T^{l-1})^{k-1} T^{l+3}.$$

Unter Benützung der ersten bis vierten Definitionsgleichung geht dieser Ausdruck über in

$$TSTS = S^k T^{l-3} S^k T^{l-1} \varphi_1^{k-1} T^{l-1} \varphi_2^{k-1} T^{l-1} \varphi_3^{k-1} T^{l+3}.$$

Damit haben wir unter Anwendung von

$$k + (k-1)k + (k-1)k^2 = k^3$$

explizit bez. implizit ausgeführten Substitutionen $TS = S^k T^l$ zum dritten Mal vorlaufend substituiert.

Führen wir die Methode des vorlaufenden Substituierens in der abgekürzten Form unter Anwendung der Substituionen $TS = S^k T^l$, $T\varphi_1 = \varphi_1^k T^l$, $T\varphi_2 = \varphi_2^k T^l$, $T\varphi_3 = \varphi_3^k T^l$ zum vierten Male durch, so erhalten wir nach

$$k + (k-1)k + (k-1)k^2 + (k-1)k^3 = k^4$$

explizit bez. implizit durchgeführten Substitutionen $TS = S^k T^l$ den Ausdruck:

$$TSTS = S^k T^{l-4} S^k T^{l-1} \varphi_1^{k-1} T^{l-1} \varphi_2^{k-1} T^{l-1} \varphi_3^{k-1} T^{l-1} \varphi_4^{k-1} T^{l+4}. \quad (46\,\mathrm{d})$$

Die $l$te Durchführung der Methode des vorlaufenden Substituierens erfordert

$$k + (k-1)k + (k-1)k^2 + \ldots (k-1)k^{l-1} = k^l$$

explizit bez. implizit auszuführende Substitutionen $TS = S^k T^l$ und führt zu dem Ausdruck

$$TS \cdot TS = S^{2k} T^{l-1} S^k T^{l-1} \varphi_1^{k-2} T^{l-1} \varphi_2^{k-1} T^{l-1} \varphi_3^{k-1} T^{l-1} \ldots$$
$$\ldots \varphi_{l-1}^{k-1} T^{l-1} \varphi_l^{k-1} T^{2(l-1)+2}. \quad (47)$$

Damit haben wir den ersten Substitutionsgang der Methode des vorlaufenden Substituierens, der l Durchführungen umfaßt und zu dem Ausdruck A_l führt, beendet.

Der ersten Durchführung des zweiten Substitutionsganges legen wir den Ausdruck A_l zugrunde und wenden die Substitutionen $TS = S^k T^l$, $T\varphi_1 = \varphi_1^k T^l \ldots T\varphi_l = \varphi_l^k T^l$ an. Wir erhalten unter Anwendung von

$$k + (k-2)k + (k-1)k^2 + (k-1)k^3 + \ldots (k-1)k^l = (k^l - 1)k$$

explizit bez. implizit ausgeführten Substitutionen $TS = S^k T^l$ die Gleichung

$$TSTS = S^{2k} T^{l-2} S^k T^{l-1} \varphi_1^{k-1} T^{l-1} \varphi_2^{k-2} T^{l-1} \varphi_3^{k-1} T^{l-1} \ldots$$
$$\ldots \varphi_l^{k-1} T^l \varphi_{l+1}^{k-1} T^{2(l-1)+3}.$$

Die $(l+2)$te Durchführung ergibt nach

$$k + (k-1)k + (k-2)k^2 + (k-1)k^3 + \ldots (k-1)k^{l+1} = (k^l - 1)k^2$$

explizit bez. implizit ausgeführten Substitutionen $TS = S^k T^l$ den Ausdruck

$$TS \cdot TS = S^{2k} T^{l-3} S^k T^{l-1} \varphi_1^{k-1} T^{l-1} \varphi_2^{k-1} T^{l-1} \varphi_3^{k-2} T^{l-1} \varphi_4^{k-1} T^{l-1} \ldots$$
$$\ldots \varphi_{l+2}^{k-1} T^{2(l-1)+4}.$$

Die $(2l-1)$te Durchführung der Methode des vorlaufenden Substituierens führt nach

$$k + (k-1)k + (k-1)k^2 \ldots (k-1)k^{l-2} + (k-2)k^{l-1} + (k-1)k^l$$
$$+ \ldots (k-1)k^{2l-2} = (k^l - 1)k^{l-1}$$

explizit bez. implizit ausgeführten Substitutionen $TS = S^k T^l$ zu dem Ausdruck

$$TSTS = S^{3k} T^{l-1} S^k T^{l-1} \varphi_1^{k-2} T^{l-1} \varphi_2^{k-1} T^{l-1} \ldots$$
$$(48) \qquad \ldots \varphi_{l-1}^{k-1} T^{l-1} \varphi_l^{k-2} T^{l-1} \varphi_{l+1}^{k-1} T^{l-1} \ldots \varphi_{2(l-1)}^{k-1} T^{l-1} \varphi_{2(l-1)+1}^{k-1} T^{3(l-1)+2}.$$

Damit haben wir den zweiten Substitutionsgang, der $l-1$ Durchführungen umfaßt und zu dem Ausdruck A_{2l-1} führt, beendet.

Den Ausdruck A_{2l-1} legen wir der ersten Durchführung des dritten Substitutionsganges, die die $2l$te Durchführung bedeutet, zugrunde. Wir erhalten nach

$$k+(k-2)k-(k-1)k^2+\ldots(k-1)k^{l-1}+(k-2)k^l+(k-1)k^{l+1}$$
$$+\ldots(k-1)k^{2l-1}=[(k^l-1)k^{l-1}-1]k$$

Substitutionen $TS=S^kT^l$ den Ausdruck

$$TS\cdot TS=S^{3k}T^{l-2}S^kT^{l-1}\varphi_1^{k-1}T^{l-1}\varphi_2^{k-2}T^{l-1}\varphi_3^{k-1}T^{l-1}\ldots$$
$$\ldots\varphi_l^{k-1}T^{l-1}\varphi_{l+1}^{k-2}T^{l-1}\varphi_{l+2}^{k-1}T^{l-1}\ldots$$
$$\ldots\varphi_{2(l-1)+1}^{k-1}T^{l-1}\varphi_{2(l-1)+2}^{k-1}T^{2(l-1)+3}. \qquad (48\,a)$$

Die $(3l-2)$te Durchführung ergibt unter Anwendung von

$$k+(k-1)k+\ldots(k-1)k^{l-2}+(k-2)k^{l-1}+(k-1)k^l$$
$$+\ldots(k-1)k^{2l-3}+(k-2)k^{2l-2}+(k-1)k^{2l-1}$$
$$+\ldots(k-1)k^{3l-3}=[(k^l-1)k^{l-1}-1]k^{l-1}$$

Substitutionen $TS=S^kT^l$ den Ausdruck:

$$TSTS=S^{4k}T^{l-1}S^kT^{l-1}\varphi_1^{k-2}T^{l-1}\varphi_2^{k-1}T^{l-1}\ldots\varphi_{l-1}^{k-1}T^{l-1}\varphi_l^{k-2}T^{l-1}\varphi_{l+1}^{k-1}T^{l-1}\ldots$$
$$\ldots\varphi_{2(l-1)}^{k-1}T^{l-1}\varphi_{2(l-1)+1}^{k-2}T^{l-1}\varphi_{2(l-1)+2}^{k-1}T^{l-1}\ldots$$
$$\ldots\varphi_{3(l-1)}^{k-1}T^{l-1}\varphi_{3(l-1)+1}^{k-1}T^{4(l-1)+2}.$$

Der dritte Substitutionsgang, der zu dem Ausdruck A_{3l-2} führt, umfaßt also wiederum $l-1$ Durchführungen.

Die $[(n-1)l-(n-2)]$te Durchführung der Methode des vorlaufenden Substituierens, die den $(n-1)$ten Substitutionsgang beendet, ergibt unter Anwendung von

$$k+(k-1)k+\ldots(k-1)k^{l-2}+(k-2)k^{l-1}+(k-1)k^l+\ldots$$
$$+\ldots(k-1)k^{2(l-1)-1}+(k-2)k^{2(l-1)}+(k-1)k^{2(l-1)+1}+\ldots$$
$$+\ldots(k-1)k^{3(l-1)-1}+(k-2)k^{3(l-1)}+(k-1)k^{3(l-1)+1}+\ldots$$
$$+\ldots(k-1)k^{(n-2)(l-1)-1}+(k-2)k^{(n-2)(l-1)}+(k-1)k^{(n-2)(l-1)+1}+\ldots$$
$$+\ldots(k-1)k^{(n-1)(l-1)}=$$
$$=\{[(k^l-1)k^{l-1}-1]k^{l-1}\ldots-1\}k^{l-1}$$

explizit bez. implizit ausgeführten Substitutionen den Ausdruck $A_{(n-1)l-(n-2)}$

$$
\begin{aligned}
TSTS = S^{nk} T^{l-1} S^k T^{l-1} \varphi_1^{k-2} T^{l-1} \varphi_2^{k-1} T^{l-1} \dots \\
\dots \varphi_{l-1}^{k-1} T^{l-1} \varphi_l^{k-2} T^{l-1} \varphi_{l+1}^{k-1} T^{l-1} \dots \\
\dots \varphi_{2(l-1)}^{k-1} T^{l-1} \varphi_{2(l-1)+1}^{k-1} T^{l-1} \varphi_{2(l-1)+2}^{k-1} T^{l-1} \\
\dots \varphi_{3(l-1)}^{k-1} T^{l-1} \varphi_{3(l-1)+1}^{k-2} T^{l-1} \varphi_{3(l-1)+2}^{k-1} T^{l-1} \\
\dots \varphi_{(n-2)(l-1)}^{k-1} T^{l-1} \varphi_{(n-2(l-1)+1}^{k-2} T^{l-1} \varphi_{(n-2)(l-1)+2}^{k-1} T^{l-1} \\
\dots \varphi_{(n-1)(l-1)}^{k-1} T^{l-1} \varphi_{(n-1)(l-1)+1}^{k-1} T^{n(l-1)+2}.
\end{aligned} \tag{49}
$$

Setzen wir in dieser Gleichung (49)

$$k = 3, \qquad l = 2$$

und für die Ausdrücke φ, φ_1, φ_2 ... die entsprechenden Ausdrücke, so erhalten wir, wie man ohne weiteres sieht, die Gleichung (38). In der Gleichung (49) liegen zwischen den Ausdrücken $\varphi_1^{k-2} T^{l-1} \dots \varphi_l^{k-2} T^{l-1} \dots \varphi_{2(l-1)+1}^{k-2} T^{l-1} \dots \varphi_{3(l-1)+1}^{k-2} T^{l-1} \dots$ jedesmal $l-2$ Ausdrücke φ mit dem Exponenten $k-1$. Ist nun wie in Gleichung (38) $l=2$, also $l-2=0$, so stoßen die Ausdrücke $\varphi_1^{k-2} T^{l-1}$, $\varphi_l^{k-2} T^{l-1}$, $\varphi_{2(l-1)+1}^{k-2} T^{l-1}$, $\varphi_{3(l-1)+1}^{k-2} \dots$ direkt aneinander, und für den Fall $k=3$, erscheinen sie in der ersten Potenz.

Die Gleichung (49) bringen wir ähnlich wie die Gleichung (38) auf Grund der Gleichungen (45), (45a), (45b), (45c), indem wir $n-1=\nu\tau$ setzen, auf die folgende Form:

$$
\begin{aligned}
TSTS = S^{(\nu\tau+1)k} T^{l-1} S^k T^{l-1} [\varphi_1^{k-2} T^{l-1} \varphi_2^{k-1} T^{l-1} \dots \\
\dots \varphi_{l-1}^{k-1} T^{l-1} \varphi_l^{k-2} T^{l-1} \varphi_{l+1}^{k-1} T^{l-1} \dots \\
\dots \varphi_{2(l-1)}^{k-1} T^{l-1} \varphi_{2(l-1)+1}^{k-2} T^{l-1} \varphi_{2(l-1)+2}^{k-1} T^{l-1} \dots \\
\dots \varphi_{\tau(l-1)}^{k-1} T^{l-1}]^{\nu} \varphi_1^{k-1} T^{l+1}.
\end{aligned} \tag{49a}
$$

Diese Gleichung (49a) ist völlig analog der ihr entsprechenden Gleichung (38b).

§ 10. Herleitung der Ausdrücke φ, φ_1, φ_2 ... und ihrer Beziehungen durch Transformieren der definierenden Relation $TS = S^k T^l$.

Die Ausdrücke φ, φ_1, φ_2 ... und ihre Beziehungen, die wir durch Anwendung der Methode des vorlaufenden Substituierens finden, lassen sich auch direkt aus der definierenden Relation

herleiten. Dabei definieren wir die Ausdrücke φ, φ_1 ... wiederum durch die Gleichungen (40), aus denen sich die Gleichungen (41) sofort ergeben.

Wir multiplizieren die definierende Relation $TS = S^k T^l$ rechts mit T^{-1} und erhalten die Gleichung

$$TST^{-1} = S^k T^{l-1},$$

die unter Benützung der ersten beiden Definitionsgleichungen übergeht in die Gleichung (44)

$$T\varphi T^{-1} = \varphi_1. \tag{44}$$

Wir potenzieren beide Seiten dieser Gleichung (44) mit k und multiplizieren darauf beide Seiten rechts mit T^{l-1}, wodurch wir die Gleichung

$$T\varphi^k T^{l-1} T^{-1} = \varphi_1^k T^{l-1}$$

gewinnen, aus der sich durch Anwendung der zweiten und dritten Definitionsgleichung die Gleichung

$$T\varphi_1 T^{-1} = \varphi_2. \tag{44a}$$

ergibt. Potenzieren wir wiederum beide Seiten dieser Gleichung (44a) mit k, multiplizieren rechts mit T^{l-1} und setzen $\varphi_1^k T^{l-1} = \varphi_2$ und $\varphi_2^k T^{l-1} = \varphi_3$, so erhalten wir die Gleichung

$$T\varphi_2 T^{-1} = \varphi_3. \tag{44b}$$

Nach n-maliger Durchführung dieser Methode erhalten wir die Gleichung

$$T\varphi_n T^{-1} = \varphi_{n+1}. \tag{44c}$$

Aus den Gleichungen (44), (44a), (44b) und (44c) ergeben sich durch rechtsseitige Multiplikation mit T sofort die Gleichungen (43)

$$\begin{aligned} T\varphi &= \varphi_1 T \\ T\varphi_1 &= \varphi_2 T \\ T\varphi_2 &= \varphi_3 T \\ &\cdots\cdots \\ T\varphi_n &= \varphi_{n+1} T. \end{aligned}$$

Aus den Gleichungen (43) finden wir die Gleichungen (42) indem wir für die auf den rechten Seiten der Gleichungen (43) stehenden

Ausdrücke $\varphi, \varphi_1 \ldots$ die Werte aus den Definitionsgleichungen einsetzen. Wir erhalten:

$$T\varphi = \varphi^k T^l$$
$$T\varphi_1 = \varphi_1^k T^l$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$T\varphi_n = \varphi_n^k T^l.$$

§ 11. Anwendung der Methode des rücklaufenden Substituierens auf die durch die Gleichungen $T'S' = S'^3 T'^2$, $S'^{\sigma'} = 1$, $T'^{\tau'} = 1$ definierte Gruppe.

Als Ausgangsoperation wählen wir analog den Ausführungen der Methode des vorlaufenden Substituierens den Ausdruck B'

$$T'S'T'S' = S'^3 T'^2 S'^3 T'^2.$$

Zur Bildung der durch $S'^3 T'^2$ zu ersetzenden Operationen $T'S'$ verwenden wir zunächst auf Grund der allgemeinen Betrachtungen in § 6 die beiden Einzeloperationen T' der in dem Ausdruck B' von rechts her an zweiter Stelle stehenden Potenz-Operation T'^2.

$$\begin{aligned} T'S'T'S' &= S'^3 T'(T'S')S'^2 T'^2 \\ &= S'^3 T' S'^3 T'^2 S'^2 T'^2 \\ &= S'^3 (T'S') S'^2 T'^2 S'^2 T'^2 \\ &= S'^4 S'^2 T'^2 S'^2 T'^2 S'^2 T'^2. \end{aligned} \tag{50}$$

Mit diesen beiden Substitutionen haben wir die Methode des rücklaufenden Substituierens zum ersten Mal durchgeführt. Der zweiten Durchführung legen wir den aus der ersten Durchführung resultierenden Ausdruck (50) B_1' zugrunde und verwenden auf Grund der allgemeinen Betrachtungen in § 6 der Reihe nach von rechts nach links die Einzeloperationen T' der in B_1' enthaltenen Potenz-Operationen T'^2 mit Ausnahme der ersten von rechts zur Bildung der durch $S'^3 T'^2$ zu ersetzenden Operation $T'S'$. Wir finden:

$$\begin{aligned} T'S'T'S' &= S'^4 S'^2 T'^2 S'^2 T'(T'S') S' T'^2 \\ &= S'^4 S'^2 T'^2 S'^2 T' S'^3 T'^2 S' T'^2 \\ &= S'^4 S'^2 T'^2 S'^2 (T'S') S'^2 T'^2 S' T'^2 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
T'S'T'S' &= S'^4S'^2T'^2S'^2S'^3T'^2S'^2T'^2S'T'^2 \\
&= S'^4S'^2T'(T'S')S'^4T'^2S'^2T'^2S'T'^2 \\
&= S'^4S'^2T'S'^3T'^2S'^4T'^2S'^2T'^2S'T'^2 \\
&= S'^4S'^2(T'S')S'^2T'^2S'^4T'^2S'^2T'^2S'T'^2 \\
&= S'^5S'^4T'^2S'^2T'^2S'^4T'^2S'^2T'^2S'T'^2. \qquad (51)
\end{aligned}
$$

Mit diesen 2^2 Substitutionen haben wir die Methode des rücklaufenden Substituierens zum zweiten Male durchgeführt. Für die dritte Durchführung legen wir den erhaltenen Ausdruck B_2' der Gleichung (51) zugrunde und verwenden zur Bildung der zu ersetzenden Operationen $(T'S')$ sämtliche Einzeloperationen T' der in B_2' enthaltenen Ausdrücke T'^2 mit Ausnahme des von rechts her an erster Stelle stehenden.

$$
\begin{aligned}
&T'S'T'S' \\
&= S'^5S'^4T'^2S'^2T'^2S'^4T'^2S'^2T'(T'S')T'^2 \\
&= S'^5S'^4T'^2S'^2T'^2S'^4T'^2S'^2T'S'^3T'^2T'^2 \\
&= S'^5S'^4T'^2S'^2T'^2S'^4T'^2S'^2(T'S')S'^2T'^4 \\
&= S'^5S'^4T'^2S'^2T'^2S'^4T'^2S'^2S'^3T'^2S'^2T'^4 \\
&= S'^5S'^4T'^2S'^2T'^2S'^4T'(T'S')S'^4T'^2S'^2T'^4 \\
&= S'^5S'^4T'^2S'^2T'^2S'^4T'S'^3T'^2S'^4T'^2S'^2T'^4 \\
&= S'^5S'^4T'^2S'^2T'^2S'^4(T'S')S'^2T'^2S'^4T'^2S'^2T'^4 \\
&= S'^5S'^4T'^2S'^2T'^2S'^4S'^3T'^2S'^2T'^2S'^4T'^2S'^2T'^4 \qquad (52) \\
&= S'^5S'^4T'^2S'^2T'(T'S')S'^6T'^2S'^2T'^2S'^4T'^2S'^2T'^4 \\
&= S'^5S'^4T'^2S'^2T'S'^3T'^2S'^6T'^2S'^2T'^2S'^4T'^2S'^2T'^4 \\
&= S'^5S'^4T'^2S'^2(T'S')S'^2T'^2S'^6T'^2S'^2T'^2S'^4T'^2S'^2T'^4 \\
&= S'^5S'^4T'^2S'^2S'^3T'^2S'^2T'^2S'^6T'^2S'^2T'^2S'^4T'^2S'^2T'^4 \\
&= S'^5S'^4T'(T'S')S'^4T'^2S'^2T'^2S'^6T'^2S'^2T'^2S'^4T'^2S'^2T'^4 \\
&= S'^5S'^4T'S'^3T'^2S'^4T'^2S'^2T'^2S'^6T'^2S'^2T'^2S'^4T'^2S'^2T'^4 \\
&= S'^5S'^4(T'S')S'^2T'^2S'^4T'^2S'^2T'^2S'^6T'^2S'^2T'^2S'^4T'^2S'^2T'^4 \\
&= S'^6S'^6T'^2S'^2T'^2S'^4T'^2S'^2T'^2S'^6T'^2S'^2T'^2S'^4T'^2S'^2T'^4.
\end{aligned}
$$

Damit haben wir mit 2^3 Substitutionen die Methode zum dritten Male durchgeführt und den ersten Substitutionsgang, der drei Durchführungen umfaßt, beendet. Für die erste Durchführung

des zweiten Substitutionsganges legen wir den Ausdruck B_3' der Gleichung (52) zugrunde und substituieren nach denselben Prinzipien. Wir sehen, daß wir den Endausdruck jeder Durchführung sofort erhalten, wenn wir für $T'S'$ den Ausdruck $S'^2T'^2$ setzen und das fehlende S' sofort mit dem folgenden T' zur nächsten Operation $T'S'$ zusammenfassen. Als Resultat der vierten Durchführung erhalten wir nach $(2^3-1)2$ Substitutionen den Ausdruck

$$T'S'T'S' = S'^7S'^8T'^2S'^2T'^2S'^4T'^2S'^2T'^2S'^6T'^2S'^2T'^2S'^4T'^2$$
$$(53) \qquad S'^2T'^2S'^8T'^2S'^2T'^2S'^4T'^2S'^2T'^2S'^6T'^2S'^2T'^2S'T'^4.$$

Die Ausdrücke (50), (51), (52), (53) lassen gewisse wiederkehrende Verbindungen der Operationen S' und T' erkennen. Führen wir folgende Abkürzungen ein:

$$\begin{aligned} \psi' &= T' \\ \psi_1' &= S'^2T'^2 \\ (54) \quad \psi_2' &= S'^4T'^2S'^2T'^2 \\ \psi_3' &= S'^6T'^2S'^2T'^2S'^4T'^2S'^2T'^2 \\ \psi_4' &= S'^8T'^2S'^2T'^2S'^4T'^2S'^2T'^2S'^6T'^2S'^2T'^2S'^4T'^2S'^2T'^2, \end{aligned}$$

so gehen die Gleichungen (50), (51), (52), (53) über in

$$(50a) \qquad T'S'T'S' = S'^4\psi_1'S'^2T'^2S'^2T'^2$$
$$(51a) \qquad = S'^5\psi_2'S'^2\psi_1'S'^2T'^2S'T'^2$$
$$(52a) \qquad = S'^6\psi_3'S'^2\psi_2'S'^4T'^2S'^2T'^4$$
$$(53a) \qquad = S'^7\psi_4'S'^2\psi_3'S'^4\psi_1'S'^2T'^2S'T'^4.$$

Bevor wir die Methode des rücklaufenden Substituierens weiter durchführen, wollen wir die Beziehungen zwischen den Ausdrücken ψ, ψ_1', ψ_2' ... ableiten. Aus den Gleichungen (54) folgt sofort:

$$\begin{aligned} \psi' &= T' \\ \psi_1' &= S'^2\psi'^2 \\ (55) \quad \psi_2' &= S'^2\psi_1'^2 \\ \psi_3' &= S'^2\psi_2'^2 \\ \psi_4' &= S'^2\psi_3'^2. \end{aligned}$$

Die Gleichungen (55) fassen wir als Definitionsgleichungen für die Ausdrücke ψ', ψ_1' ... auf. Wir definieren also

$$\begin{aligned}
\psi' &= T' \\
\psi_1' &= S'^2 \psi'^2 \\
\psi_2' &= S'^2 \psi_1'^2 \\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
\psi_n' &= S_{,}^{\,2} \psi_{n-1}'^2 .
\end{aligned} \tag{55a}$$

Das Bildungsgesetz dieser Definitionsgleichungen ist ohne weiteres ersichtlich. Der Zusammenhang der durch die Gleichungen (55a) definierten Operationen ψ', ψ_1' ... mit den Grundoperationen S' und T' ergibt sich sofort aus den Definitionsgleichungen. Die Beziehungen zwischen den einzelnen Operationen ψ', ψ_1' ... leiten wir mit Hilfe der Methode des rücklaufenden Substituierens ab. Aus der zweiten Gleichung (55a) folgt durch rechtsseitige Multiplikation mit S'

$$\psi_1' S' = S'^2 T'^2 S'.$$

In dem Ausdruck auf der rechten Seite dieser Gleichung führen wir die Methode des rücklaufenden Substituierens unter Anwendung der Substitutionen $T'S' = S'^3 T'^2$ einmal durch.

$$\begin{aligned}
\psi_1' S' &= S'^2 T'(T'S') \\
&= S'^2 T' S'^3 T'^2 \\
&= S'^2 (T'S') S'^2 T'^2 \\
&= S' S'^4 T'^2 S'^2 T'^2 .
\end{aligned}$$

Wir finden nach 2 Substitutionen $T'S' = S'^3 T'^2$ unter Benützung der zweiten Definitionsgleichung

$$\psi_1' S' = S'^3 \psi_1'^2 . \tag{56}$$

Der Ausdruck ψ_1' gehorcht also einer der definierenden Relation $T'S' = S'^3 T'^2$ völlig analogen Gleichung.

Auf den aus der dritten Definitionsgleichung durch rechtsseitiges Multiplizieren mit S' sich ergebenden Ausdruck

$$\psi_2' S = S'^2 \psi_1'^2 S'$$

wenden wir die Methode des rücklaufenden Substituierens in der abgekürzten Form an, indem wir die Substitutionen $\psi_1' S' = S'^3 \psi_1'^2$ ausführen. Wir erhalten:

$$\begin{aligned}\psi_2' S' &= S'^2 \psi_1' (\psi_1' S') \\ &= S'^2 \psi_1' S'^3 \psi_1'^2 \\ &= S'^2 (\psi_1' S') S'^2 \psi_1'^2 \\ &= S'^3 S'^2 \psi_1'^2 S'^2 \psi_1'^2.\end{aligned}$$

Wir erhalten also nach 2 Substitutionen $\psi_1' S' = S'^3 \psi_1'^2$, die implizite 2^2 Substitutionen $T'S' = S'^3 T'^2$ enthalten, unter Benützung der dritten Definitionsgleichung

(56 a) $$\psi_2' S' = S'^3 \psi_2'^2.$$

Der Ausdruck ψ_2' gehorcht also ebenfalls einer der definierenden Relation $T'S' = S'^3 T'^2$ völlig analogen Gleichung.

Aus der Gleichung

$$\psi_3' S' = S'^2 \psi_2'^2 S'$$

erhalten wir nach 2 Substitutionen $\psi_1' S' = S'^3 \psi_2'^2$, die implizite 2^2 Substitutionen $\psi_1' S' = S'^3 \psi_1'^2$, bez. 2^3 Substitutionen $T'S' = S'^3 T'^2$ enthalten, die Gleichung

(56 b) $$\psi_3' S' = S'^3 \psi_3'^2.$$

Aus der Gleichung

$$\psi_n' S' = S'^2 \psi_{n-1}'^2 S'$$

folgt nach 2 Substitutionen $\psi_{n-1}' S' = S'^3 \psi_{n-1}'^2$, bez. 2^2 Substitutionen $\psi_{n-2}' S' = S'^3 \psi_{n-2}'^2$ . . . bez. 2^n Substitutionen $T'S' = S'^3 T'^2$ die Gleichung

(56 c) $$\psi_n' S' = S'^3 \psi_n'^2.$$

Wir können also jetzt folgenden Satz aussprechen:

Satz XVII: Die durch die Gleichungen (55 a) definierten Operationen ψ', ψ_1', ψ_2' . . . gehorchen bestimmten der definierenden Relation $T'S' = S'^3 T'^2$ völlig analogen Gleichungen.

Aus der definierenden Relation $T'S' = S'^3 T'^2$ und den Gleichungen (56), (56 a), (56 b) und (56 c) ergeben sich durch linksseitige Multiplikation mit S'^1 unter Benützung der Definitionsgleichungen die folgenden Beziehungen:

$$\begin{aligned} S'^{-1}\psi' S' &= \psi'_1 \\ S'^{-1}\psi'_1 S' &= \psi'_2 \\ S'^{-1}\psi'_2 S' &= \psi'_3 \\ S'^{-1}\psi'_3 S' &= \psi'_1 \\ &\cdots\cdots \\ S'^{-1}\psi_n S' &= \psi'_{n+1}. \end{aligned} \tag{57}$$

Satz XVIIa: Jeder Ausdruck ψ', $\psi'_1 \ldots$ läßt sich aus seinem vorhergehenden durch Transformation mit S' herleiten.

Diese letztere Gesetzmäßigkeit ist äquivalent dem Bildungsgesetz, das den Definitionsgleichungen (55a) der Ausdrücke ψ', $\psi'_1 \ldots$ zugrunde liegt und könnte ebenso zur Definition der Ausdrücke ψ', $\psi'_1 \ldots$ verwendet werden.

Setzen wir in den Gleichungen (57) für $\psi'_1, \psi'_2 \ldots$ den Wert aus der vorhergehenden Gleichung ein, so ergeben sich folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} S'^{\,1}\psi' S' &= \psi'_1 \\ S'^{-2}\psi' S'^{\,2} &= \psi'_2 \\ S'^{-3}\psi' S'^{\,3} &= \psi'_3 \\ &\cdots\cdots \\ S'^{-n}\psi' S'^{\,n} &= \psi'_n \end{aligned} \tag{58}$$

Aus den Gleichungen (58) folgt nach analogen Schlüssen wie früher:

Satz XVIIb: Die Reihe der Ausdrücke ψ', ψ'_1, $\psi'_2 \ldots$ enthält σ' und nur σ' verschiedene Werte, wobei σ' die Ordnungszahl der Operation S' bedeutet. Dabei setzen wir die Komposition der Operation T' mit den Potenzen von S' als nicht kommutativ voraus. Aus der allgemeinen Gleichung

$$S'^{-n}\psi' S'^{\,n} = \psi'_n$$

ergeben sich sofort die Gleichungen

$$\begin{aligned} \psi'_\sigma &= \psi' \\ \psi'_{\sigma+1} &= \psi'_1 \\ &\cdots\cdots \\ \psi'_{2\sigma} &= \psi' \\ &\cdots\cdots \\ \psi'_{3\sigma} &= \psi'. \end{aligned} \tag{59}$$

Die gleichen Werte der Reihe $\psi', \psi_1' \ldots$ wiederholen sich periodisch mit der Periode σ'. Sind zwei Ausdrücke ψ_μ' und ψ_ν' gleich, so besteht zwischen ihren Indizis die Kongruenz

$$\mu \equiv \nu \mod \sigma'.$$

Mit Hilfe der gewonnenen Kenntnisse setzen wir jetzt die Methode des rücklaufenden Substituierens fort. Für die fünfte Durchführung legen wir die Gleichung (55a) zugrunde und führen zunächst die Substitutionen $T'S' = S'^3 T'^2$ aus, indem wir zur Bildung der durch $S'^3 T'^2$ zu ersetzenden Operationen $T'S'$ die beiden Einzeloperationen T' der von rechts her an zweiter Stelle stehenden Potenz-Operation T'^2 verwenden. Sodann führen wir die Substitutionen $T'S'^3 = S'^3 T'^2$ implizit aus, indem wir die linken Seiten der Gleichungen (56) als zu ersetzende und die rechten Seiten als ersetzende Operationen auffassen. Zur Bildung der zu ersetzenden Operationen verwenden wir der Reihe nach von rechts nach links die Operationen ψ_1', ψ_3' und ψ_4'. Wir erhalten:

$$\begin{aligned}
T'S'\,T'S' &= S'^7 \psi_4' S'^2 \psi_3' S'^4 \psi_1' S'^2 T'(T'S')T'^4 \\
&= S'^7 \psi_4' S'^2 \psi_3' S'^4 \psi_1' S'^2 T'S'^3 T'^2 T'^4 \\
&= S'^7 \psi_4' S'^2 \psi_3' S'^4 \psi_1' S'^2 (T'S') S'^2 T'^6 \\
&= S'^7 \psi_4' S'^2 \psi_3' S'^4 \psi_1' S'^2 S'^3 T'^2 S'^2 T'^6 \\
&= S'^7 \psi_4' S'^2 \psi_3' S'^4 (\psi_1' S') S'^4 T'^2 S'^2 T'^6 \\
&= S'^7 \psi_4' S'^2 \psi_3'' S'^4 S'^3 \psi_1'^2 S'^4 T'^2 S'^2 T'^6 \\
&= S'^7 \psi_4' S'^2 (\psi_3' S') S'^6 \psi_1'^2 S'^4 T'^2 S'^2 T'^6 \\
&= S'^7 \psi_4' S'^2 S'^3 \psi_3'^2 S'^6 \psi_1'^2 S'^4 T'^2 S'^2 T'^6 \\
&= S'^7 (\psi_4' S') S'^4 \psi_3'^2 S'^6 \psi_1'^2 S'^4 T'^2 S'^2 T'^6 \\
&= S'^7 S'^3 \psi_4'^2 S'^4 \psi_3'^2 S'^6 \psi_1'^2 S'^4 T'^2 S'^2 T'^6.
\end{aligned}$$

Unter Benutzung der Definitionsgleichungen formen wir den letzten Ausdruck um:

$$T'S'\,T'S' = S'^8 \psi_5' S'^2 \psi_4' S'^4 \psi_2' S'^4 T'^2 S'^2 T'^6. \tag{60}$$

Damit haben wir mit

$$(2^3 - 1)\,2^2 = 2 + 2 + 2^3 + 2^4$$

Substitutionen $T'S' = S'^3 T'^3$ die Methode des rücklaufenden Substituierens zum fünften Mal durchgeführt und den zweiten Substitutionsgang, der zwei Durchführungen umfaßt, beendet.

Die sechste Durchführung ergibt nach

$$[(2^3-1)\,2^2-1]\,2 = 2+2^2+2^4+2^5$$

Substitutionen $T'S' = S'^3 T'^2$ die Gleichung

$$T'S'T'S' = S'^9 \psi_6' S'^2 \psi_5' S'^4 \psi_3' S'^4 \psi_1' S'^2 T'^2 S' T'^6. \qquad (61)$$

Die siebente Durchführung führt nach

$$[(2^3-1)\,2^2-1]\,2^2 = 2+2+2^2+2^5+2^6$$

Substitutionen $T'S' = S'^3 T'^2$ zu der Gleichung

$$T'S'T'S' = S'^{10} \psi_7' S'^2 \psi_6' S'^4 \psi_4' S'^4 \psi_2' S'^4 T'^2 S'^2 T'^8. \qquad (62)$$

Die $(2n-1)$te Durchführung, welche die zweite Durchführung des $(n-1)$ten Substitutionsganges bildet, ergibt nach

$$\{[(2^3-1)\,2^2-1]\,2^2 \ldots -1\}\,2^2 = 2+2+2^3+2^5+\ldots 2^{2n-3}+2^{2n-2}$$

Substitutionen $T'S' = T'^3 S'^2$ die Gleichung

$$T'S'T'S' = S'^{2n+2} \psi_{2(n-1)+1}' S'^2 \psi_{2(n-1)}' S'^4 \psi_{2(n-1)-2}' S'^4 \psi_{2(n-1)-4}' S'^4 \ldots \psi_4' S'^4 \psi_2' S'^4 T'^2 S'^2 T'^{2n}.$$

Diese Gleichung bringen wir auf Grund der aus den Gleichungen (58) gezogenen Folgerungen in die Form, indem wir

$$n-1 = \nu\sigma'$$

setzen

$$T'S'T'S' = S'^4 \psi_1' [S'^2 \psi_{2\sigma'}' S'^2 S'^2 \psi_{2\sigma'-2}' S'^2 \ldots S'^2 \psi_2' S'^2]^\nu S'^2 T'^2 S'^2 T'^{2(\nu\sigma'+1)}. \qquad (63a)$$

§ 12. Anwendung der Methode des rücklaufenden Substituierens auf die durch die Gleichungen $TS = S^k T^l$, $S^\sigma = 1$, $T^\tau = 1$ definierte Gruppe.

Die Anwendung der Methode des rücklaufenden Substituierens auf die durch die allgemeinen Gleichungen

$$TS = S^k T^l$$
$$S^\sigma = 1$$
$$T^\tau = 1$$

definierte Gruppe führt zu ähnlichen Ausdrücken wie die Methode des vorlaufenden Substituierens. Wir bezeichnen die durch Anwendung der Methode des rücklaufenden Substituierens entstehenden Ausdrücke mit

$$\psi,\ \psi_1,\ \psi_2 \ldots$$

und definieren sie durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \psi &= T \\ \psi_1 &= S^{k-1}\psi^l \\ \psi_2 &= S^{k-1}\psi_1^l \\ \psi_3 &= S^{k-1}\psi_2^l \\ &\ldots\ldots \\ \psi_n &= S^{k-1}\psi_{n-1}^l. \end{aligned} \tag{64}$$

Das Bildungsgesetz dieser Definitionsgleichungen ist ohne weiteres ersichtlich: Jeder folgende Ausdruck ψ_ν geht aus seinem vorhergehenden $\psi_{\nu-1}$ genau so hervor, wie dieser aus seinem vorhergehenden $\psi_{\nu-2}$. Auf Grund der Definitionsgleichungen lassen sich die Ausdrücke $\psi, \psi_1 \ldots$ sofort in den Grundoperationen ausdrücken:

$$\begin{aligned} \psi &= T \\ \psi_1 &= S^{k-1}T^l \\ \psi_2 &= S^{k-1}(S^{k-1}T^l)^l \\ \psi_3 &= S^{k-1}[S^{k-1}(S^{k-1}T^l)^l]^l. \end{aligned} \tag{65}$$

Zwecks Herleitung der Beziehungen zwischen den Ausdrücken $\psi, \psi_1 \ldots$ gehen wir von der zweiten Definitionsgleichung, die wir rechts mit S multiplizieren, aus

$$\psi_1 S = S^{k-1}T^l S$$

und führen in dem Ausdruck auf der rechten Seite die Methode des rücklaufenden Substituierens durch, indem wir zur Bildung der durch $S^k T^l$ zu ersetzenden Operationen TS der Reihe nach von rechts nach links die sämtlichen Einzeloperationen T der Potenzoperation T^l verwenden. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} \psi_1 S &= S^{k-1}T^{l-1}(TS) \\ &= S^{k-1}T^{l-1}S^k T^l \\ &= S^{k-1}T^{l-2}(TS)S^{k-1}T^l \\ &= S^{k-1}T^{l-2}S^k T^l S^{k-1}T^l. \end{aligned}$$

Nach l Substitutionen $TS = S^k T^l$ erhalten wir

$$\psi_1 S = S^k (S^{k-1} T^l)^l$$

und unter Berücksichtigung der zweiten Definitionsgleichung geht diese Gleichung über in

$$\psi_1 S = S^k \psi_1^l. \tag{66}$$

Die Operation ψ_1 gehorcht also einer der definierenden Relation $TS = S^k T^l$ völlig analogen Gleichung.

Zur Herleitung der Beziehungen zwischen den Operationen ψ_2 und S gehen wir aus von der dritten Definitionsgleichung, die wir rechts mit S multiplizieren,

$$\psi_2 S = S^{k-1} \psi_1^l S$$

und führen in dem Ausdruck $S^{k-1} \psi_1^l S$ die Methode des rücklaufenden Substituierens in der abgekürzten Form durch, indem wir

$$\psi_1 S = S^k \psi_1^l$$

substituieren und zur Bildung der durch $S^k \psi_1^l$ zu ersetzenden Operationen $\psi_1 S$ der Reihe nach von rechts nach links die sämtlichen Einzeloperationen ψ_1 verwenden. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} \psi_2 S &= S^{k-1} \psi_1^{l-1} (\psi_1 S) \\ &= S^{k-1} \psi_1^{l-1} S^k \psi_1^l \\ &= S^{k-1} \psi_1^{l-2} (\psi_1 S) S^{k-1} \psi_1^l \\ &= S^{k-1} \psi_1^{l-2} S^k \psi_1^l S^{k-1} \psi_1. \end{aligned}$$

Nach l Substitutionen

$$\psi_1 S = S^k \psi_1^l,$$

die implizite l^2 Substitutionen

$$TS = S^k T^l$$

enthalten, finden wir unter Benützung der dritten Definitionsgleichung

$$\psi_2 S = S^k \psi_2^l. \tag{66a}$$

Fahren wir in dieser Weise fort, so erhalten wir aus der Gleichung

$$\psi_n S = S^{k-1} \psi_{n-1} S$$

nach l Substitutionen $\psi_{n-1} S = S^k \psi_{n-1}^l$, bez. l^2 Substitutionen $\psi_{n-2} S = S^k \psi_{n-2}^l$ . . . bez. l^n Substitutionen $TS = S^k T^l$ unter Berücksichtigung der $(n+1)$ Definitionsgleichung die Gleichung

$$\psi_n S = S^k \psi_n^l. \tag{66b}$$

Wir können also jetzt folgenden Satz aussprechen:

Satz XVIII: Die durch die Gleichungen (64) definierten Ausdrücke ψ, ψ_1 ... gehorchen bestimmten, der definierenden Relation

$$TS = S^k T^l$$

völlig analogen Gleichungen.

Multiplizieren wir die Gleichungen (66) links mit S^{-1}, so erhalten wir unter Berücksichtigung der Definitionsgleichungen:

$$\begin{aligned} S^{-1}\psi S &= \psi_1 \\ S^{-1}\psi_1 S &= \psi_2 \\ S^{-1}\psi_2 S &= \psi_3 \\ S^{-1}\psi_3 S &= \psi_4 \\ &\cdots\cdots \\ S^{-1}\psi_n S &= \psi_{n+1}. \end{aligned} \tag{67}$$

Satz XVIIIa: Jeder folgende Ausdruck entsteht aus dem vorhergehenden durch Transformation mit S.

In den Gleichungen (67) setzen wir für die Ausdrücke ψ, ψ_1 ... den Wert aus der vorhergehenden Gleichung ein und erhalten:

$$\begin{aligned} S^{-1}\psi S &= \psi_1 \\ S^{-2}\psi S^2 &= \psi_2 \\ S^{-3}\psi S^3 &= \psi_3 \\ &\cdots\cdots \\ S^{-n}\psi S^n &= \psi_n. \end{aligned} \tag{68}$$

Aus diesen Gleichungen folgt:

Satz XVIIIb: Die Reihe der Ausdrücke ψ, ψ_1 ... besitzt σ und nur σ verschiedene Werte, wobei σ die Ordnungszahl der Operation S bedeutet. Dabei setzen wir die Operation T mit den Potenzen der Operation S als nicht vertauschbar voraus.

Aus der allgemeinen Gleichung

$$S^{-n}\psi S^n = \psi_n$$

ergeben sich sofort folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned} \psi_\sigma &= \psi \\ \psi_{\sigma+1} &= \psi_1 \\ &\cdots \\ \psi_{2\sigma} &= \psi \\ \psi_{2\sigma+1} &= \psi_1 \\ &\cdots \\ \psi_{\nu\sigma} &= \psi. \end{aligned} \tag{69}$$

Die gleichen Werte der Reihe ψ, ψ_1 ... wiederholen sich periodisch mit der Periode σ. Ist allgemein

$$\psi_\mu = \psi_\nu,$$

so besteht zwischen den Indizes die Kongruenz

$$\mu \equiv \nu \bmod \sigma.$$

Mit Hilfe der gewonnenen Ausdrücke ψ, ψ_1, ψ_2 ... und ihrer Beziehungen gestaltet sich die Anordnung der Methode des rücklaufenden Substituierens unter Zugrundelegung des Ausdruckes B

$$TSTS = S^k T^l S^k T^l$$

sehr einfach. Wir verwenden zur Bildung der zu ersetzenden Operationen TS der Reihe nach von rechts nach links die sämtlichen Einzeloperationen T des von rechts her an zweiter Stelle stehenden Ausdruckes T^l und erhalten:

$$\begin{aligned} TSTS &= S^k T^{l-1}(TS) S^{k-1} T^l \\ &= S^k T^{l-1} S^k T^l S^{k-1} T^l \\ &= S^k T^{l-2}(TS) S^{k-1} T^l S^{k-1} T^l \\ &= S^k T^{l-2} S^k T^l S^{k-1} T^l S^{k-1} T^l. \end{aligned}$$

Nach l Substitutionen $TS = S^k T^l$ erhalten wir

$$TSTS = S^{k+1}(S^{k-1} T^l)^{l-1} S^{k-1} T^l S^{k-1} T^l.$$

Für $S^{k-1} T^l$ setzen wir ψ_1

$$TSTS = S^{k+1} \psi_1^{l-1} S^{k-1} T^l S^{k-1} T^l. \tag{70}$$

Damit haben wir mit l Substitutionen $TS = S^k T^l$ die Methode des rücklaufenden Substituierens zum ersten Mal durchgeführt.

Für die zweite Durchführung legen wir den auf der rechten Seite der Gleichung (70) stehenden Ausdruck, den wir auf Grund der allgemeinen Betrachtungen des § 6 mit B_1 bezeichnen, zugrunde und führen zunächst l Substitutionen $TS = S^k T^l$ explizit aus, indem wir zur Bildung der durch $S^k T^l$ zu ersetzenden Operationen TS der Reihe nach von rechts nach links die sämtlichen Einzeloperationen T des in B_1 an zweiter Stelle von rechts her stehenden Ausdruckes T^l verwenden. Wir erhalten

$$\begin{aligned} TSTS &= S^{k+1}\psi_1^{l-1} S^{k-1} T^{l-1}(TS) S^{k-2} T^l \\ &= S^{k+1}\psi_1^{l-1} S^{k-1} T^{l-1} S^k T^l S^{k-2} T^l \\ &= S^{k+1}\psi_1^{l-1} S^{k-1} T^{l-2}(TS) S^{k-1} T^l S^{k-2} T^l \\ &= S^{k+1}\psi_1^{l-1} S^{k-1} T^{l-2} S^k T^l S^{k-1} T^l S^{k-2} T^l. \end{aligned}$$

Nach l Substitutionen erhalten wir

$$TSTS = S^{k+1}\psi_1^{l-1} S S^{k-1}(S^{k-1} T^l)^{l-1} S^{k-1} T^l S^{k-2} T^l.$$

In dem Ausdruck $\psi_1^{l-1} S$ führen wir die Methode des rücklaufenden Substituierens in der abgekürzten Form durch, indem wir

$$\psi_1 S = S^k \psi_1^l$$

substituieren und zur Bildung der durch $S^k \psi_1^l$ zu ersetzenden Operationen $\psi_1 S$ der Reihe nach von rechts nach links sämtliche Einzeloperationen ψ_1 des Ausdruckes ψ_1^{l-1} verwenden. Wir erhalten

$$\begin{aligned} TSTS &= S^{k+1}\psi_1^{l-2}(\psi_1 S) S^{k-1}(S^{k-1} T^l)^{l-1} S^{k-1} T^l S^{k-2} T^l \\ &= S^{k+1}\psi_1^{l-2} S^k \psi_1^l S^{k-1}(S^{k-1} T^l)^{l-1} S^{k-1} T^l S^{k-2} T^l \\ &= S^{k+1}\psi_1^{l-3}(\psi_1 S) S^{k-1}\psi_1^l S^{k-1}(S^{k-1} T^l)^{l-1} S^{k-1} T^l S^{k-2} T^l \\ &= S^{k+1}\psi^{l-3} S^k \psi_1^l S^{k-1}\psi_1^l S^{k-1}(S^{k-1} T^l)^{l-1} S^{k-1} T^l S^{k-2} T^l. \end{aligned}$$

Nach $l-1$ Substitutionen $\psi_1 S = S^k \psi_1^l$, die implizite $(l-1)\,l$ Substitutionen $TS = S^k T^l$ enthalten, finden wir unter Berücksichtigung der Definitionsgleichungen:

$$TSTS = S^{k+2}\psi_2^{l-1} S^{k-1}\psi_1^{l-1} S^{k-1} T^l S^{k-2} T^l. \tag{70a}$$

Mit $l + (l-1)\,l = l^2$ Substitutionen $TS = S^k T^l$ haben wir also die Methode des vorlaufenden Substituierens zum zweiten Mal durchgeführt.

Führen wir in dem Ausdruck (70a) die Methode des rücklaufenden Substituierens zum dritten Mal durch, indem wir zunächst

ausführlich substituieren $TS = S^k T^l$, wobei wir zur Bildung der durch $S^k T^l$ zu ersetzenden Operationen TS sämtliche Einzeloperationen T des in (70a) von rechts her an zweiter Stelle stehenden Ausdruckes T^l der Reihe nach von rechts nach links verwenden, und sodann in abgekürzter Form substituieren unter Vornahme der Substitutionen $\psi_1 S = S^k \psi_1^l$ bez. $\psi_2 S = S^k \psi_2^l$, wobei wir zur Bildung der durch $S^k \psi_1^l$ bez. $S^k \psi_2^l$ zu ersetzenden Operationen $\psi_1 S$ bez. $\psi_2 S$ sämtliche Einzeloperationen ψ_1 bez. ψ_2 der in (70a) enthaltenen Ausdrücke ψ_1^{l-1} bez. ψ_2^{l-1} der Reihe nach von rechts nach links verwenden, so erhalten wir nach

$$l + (l-1)l + (l-1)l^2 = l^3$$

explizit bez. implizit ausgeführten Substitutionen

$$TS = S^k T^l$$

die Gleichung

$$TSTS = S^{k+3} \psi_3^{l-1} S^{k-1} \psi_2^{l-1} S^{k-1} \psi_1^{l-1} S^{k-1} T^l S^{k-3} T^l. \qquad (70b)$$

In dieser Weise fahren wir fort und erhalten nach der $k$ten Durchführung der Methode des rücklaufenden Substituierens, die

$$l + (l-1)l + (l-1)l^2 + \ldots (l-1)l^{k-1} = l^k$$

explizit bez. implizit auszuführende Substitutionen $TS = S^k T^l$ umfaßt, unter Berücksichtigung der Definitionsgleichungen

$$TSTS = S^{2(k-1)+2} \psi_k^{l-1} S^{k-1} \psi_{k-1}^{l-1} \ldots S^{k-1} \psi_2^{l-1} S^{k-1} \psi_1^{l-2} S^{k-1} T^l S^{k-1} T^{2l}.$$

Diesen Ausdruck, den wir mit B_k bezeichnen, legen wir der $(k+1)$ten Durchführung der Methode des rücklaufenden Substituierens zugrunde und erhalten nach

$$l + (l-2)l + (l-1)l^2 + \ldots (l-1)l^k = (l^k - 1)l$$

explizit bez. implizit durchzuführenden Substitutionen

$$TS = S^k T^l$$

den Ausdruck B_{k+1}

$$TSTS = S^{2(k-1)+3} \psi_{k+1}^{l-1} S^{k-1} \psi_k^{l-1} \ldots \qquad (71a)$$
$$\ldots S^{k-1} \psi_3^{l-1} S^{k-1} \psi_2^{l-2} S^{k-1} \psi_1^{l-1} S^{k-1} T^l S^{k-2} T^{2l}.$$

Die $(2k-1)$te Durchführung, die den zweiten Substitutionsgang, der $k-1$ Durchführungen umfaßt, beendet, ergibt nach

$$l + (l-1)l + \ldots (l-1)l^{k-2} + (l-2)l^{k-1} + (l-1)l^k$$
$$+ \ldots (l-1)l^{2(k-1)} = (l^k - 1)l^{k-1}$$

explizit bez. implizit auszuführenden Substitutionen $TS = S^k T^l$ die Gleichung

$$
\begin{aligned}
TSTS = {} & S^{3(k-1)+2}\psi^{l-1}_{2(k-1)+1} S^{k-1}\psi^{l-1}_{2(k-1)} \cdots \\
& \cdots S^{k-1}\psi^{l-1}_{k-1+2} S^{k-1}\psi^{l-2}_{k-1+1} S^{k-1}\psi^{l-1}_{k-1} \cdots \\
& \cdots S^{k-1}\psi^{k-1}_{2} S^{k-1}\psi^{k-2}_{1} S^{k-1} T^l S^{k-1} T^{4l}.
\end{aligned} \tag{73}
$$

Der $(n-1)$te Substitutionsgang, der mit der $[(n-1)(k-1)+1]$ten Durchführung endet, welche

$$
\begin{aligned}
& l + (l-1)l + \ldots (l-1)l^{k-2} + (l-2)l^{k-1} + (l-1)l^k \ldots \\
& + \ldots (l-1)l^{2(k-1)-1} + (l-2)l^{2(k-1)} + (l-1)l^{2(k-1)+1} \ldots \\
& + \ldots (l-1)l^{(n-1)(k-1)} = \{[(l^k-1)l^{k-1}-1]l^{k-1} \ldots -1\}\, l^{k-1}
\end{aligned}
$$

explizit bez. implizit auszuführende Substitutionen $TS = S^k T^l$ umfaßt, führt zu dem Ausdruck

$$
\begin{aligned}
TSTS = {} & S^{n(k-1)+2}\psi^{l-1}_{(n-1)(k-1)+1} S^{k-1}\psi^{l-1}_{(n-1)(k-1)} \cdots \\
& \cdots S^{k-1}\psi^{l-1}_{(n-2)(k-1)+2} S^{k-1}\psi^{l-2}_{(n-2)(k-1)+1} S^{k-1}\psi^{l-1}_{(n-2)(k-1)} \cdots \\
& \cdots S^{k-1}\psi^{l-1}_{2(k-1)+2} S^{k-1}\psi^{l-2}_{2(k-1)+1} S^{k-1}\psi^{l-1}_{2(k-1)} \cdots \\
& \cdots S^{k-1}\psi^{l-1}_{(k-1)+2} S^{k-1}\psi^{l-2}_{(k-1)+1} S^{k-1}\psi^{l-1}_{k-1} \cdots \\
& \cdots S^{k-1}\psi^{l-1}_{2} S^{k-1}\psi^{l-2}_{1} S^{k-1} T^l S^{k-1} T^{nl}.
\end{aligned} \tag{74}
$$

Aus dieser Gleichung (74) ergibt sich, da auf Grund der Gleichungen (69) die Gleichung

$$
\begin{aligned}
& [S^{k-1}\psi^{l-1}_{\sigma(k-1)} S^{k-1}\psi^{l-1}_{\sigma(k-1)-1} \cdots S^{k-1}\psi^{l-1}_{(\sigma-1)(k-1)+2} S^{k-1}\psi^{l-2}_{(\sigma-1)(k-1)+1} S^{k-1}\psi^{l-1}_{(\sigma-1)(k-1)} \cdots \\
& \cdots S^{k-1}\psi^{l-1}_{2(k-1)+2} S^{k-1}\psi^{l-2}_{2(k+1)+1} S^{k-1}\psi^{l-1}_{2(k-1)} \cdots \\
& \cdots S^{k-1}\psi^{l-1}_{k-1+2} S^{k-1}\psi^{l-2}_{k-1+1} S^{k-1}\psi^{l-1}_{k-1} \cdots S^{k-1}\psi^{l-1}_{2} S^{k-1}\psi^{l-2}_{1}]^{\nu} \\
& = S^{k-1}\psi_{\nu\sigma(k-1)} \cdots S^{k-1}\psi^{l-1}_{(\nu\sigma-1)(k-1)+2} S^{k-1}\psi^{l-2}_{(\nu\sigma-1)(k-1)+1} S^{k-1}\psi^{l-1}_{(\nu\sigma-1)(k-1)} \cdots \\
& \cdots S^{k-1}\psi^{l-1}_{2(k-1)+2} S^{k-1}\psi^{l-2}_{2(k-1)+1} S^{k-1}\psi^{l-1}_{2(k-1)} \cdots \\
& \cdots S^{k-1}\psi^{l-1}_{k-1+2} S^{k-1}\psi^{l-2}_{k-1+1} S^{k-1}\psi^{l-1}_{k-1} \cdots S^{k-1}\psi^{l-1}_{2} S^{k-1}\psi^{l-2}_{1}
\end{aligned}
$$

besteht, die folgende Beziehung:

$$
\begin{aligned}
TSTS = {} & S^{k+1}\psi^{l-1}_{1}[S^{k-1}\psi^{l-1}_{\sigma(k-1)} \cdots \\
& \cdots S^{k-1}\psi^{l-1}_{(\sigma-1)(k-1)+2} S^{k-1}\psi^{l-2}_{(\sigma-1)(k-1)+1} S^{k-1}\psi^{l-1}_{(\sigma-1)(k-1)} \cdots \\
& \cdots S^{k-1}\psi^{l-1}_{2(k-1)+2} S^{k-1}\psi^{l-2}_{2(k-1)+1} S^{k-1}\psi^{l-1}_{2(k-1)} \cdots \\
& \cdots S^{k-1}\psi^{l-1}_{k-1+2} S^{k-1}\psi^{l-2}_{k-1+1} S^{k-1}\psi^{l-1}_{k-1} \cdots \\
& \cdots S^{k-1}\psi^{l-1}_{2} S^{k-1}\psi^{l-2}_{1}]^{\nu} S^{k-1} T^l S^{k-1} T^{(\nu\sigma+1)l}
\end{aligned} \tag{74a}
$$

wobei wir

$$n-1=\sigma\nu$$

setzen.

In der Gleichung (74a) liegen zwischen je zwei Ausdrücken ψ mit dem Exponenten $l-2$, die in der Gleichung (63a), wo $l=2$ ist, in die identische Operation übergehen, $k-2$ Ausdrücke ψ mit dem Exponenten $l-1$, deren Zahl sich in der Gleichung (63a) auf 1 reduziert. Es bestehen also zwischen den Gleichungen (74a) und (63a), die wir durch Anwendung der Methode des rücklaufenden Substituierens gewonnen haben, analoge Beziehungen wie zwischen den Gleichungen (49a) und (38b), die sich durch Anwendung der Methode des vorlaufenden Substituierens ergeben haben.

§ 13. Herleitung der Operationen ψ, ψ_1 ... und ihrer Beziehungen durch Transformieren und Potenzieren der definierenden Relation $TS=S^kT^l$.

Die Operationen ψ, ψ_1 ... und ihre Beziehungen lassen sich auch direkt aus der definierenden Relation herleiten. Wir definieren die Operationen ψ, ψ_1 ... wieder durch die Gleichungen (64), aus denen sich sofort die Gleichungen (65) ergeben. Durch linksseitiges Multiplizieren der definierenden Relation mit S^{-1} finden wir die Gleichung

$$S^{-1}TS=S^{k-1}T^l,$$

die unter Benützung der zweiten Definitionsgleichung übergeht in

$$S^{-1}TS=\psi_1. \tag{67}$$

Diese Gleichung potenzieren wir mit l und multiplizieren links mit S^{k-1}, sodaß wir die Gleichung

$$S^{-1}S^{k-1}T^lS=S^{k-1}\psi_1^l$$

erhalten, aus der wir auf Grund der Definitionsgleichungen die Beziehungen

$$S^{-1}\psi_1 S=\psi_2$$

herleiten. Aus dieser Gleichung ergibt sich weiter durch Potenzieren und linksseitiges Multiplizieren mit S^{k-1} die Gleichung

$$S^{-1}S^{k-1}\psi_1^lS=S^{k-1}\psi_2^l,$$

aus der wir auf Grund der Definitionsgleichungen die Beziehung

$$S^{-1}\psi_2 S = \psi_3$$

gewinnen. Aus der Gleichung

$$S^{-1}\psi_{n-1} S = \psi_n$$

folgt durch Potenzieren mit l und linksseitiges Multiplizieren mit S^{k-1} die Gleichung

$$S^{-1}S^{k-1}\psi_{n-1}^{l} S = S^{k-1}\psi_n^l,$$

die unter Benützung der $(n+1)$ten und $(n+2)$ten Definitionsgleichung übergeht in die Form

$$S^{-1}\psi'_n S = \psi'_{n+1}.$$

Die Gleichungen (66) und (68) lassen sich sofort aus den Gleichungen (67) herleiten.

§ 14. Betrachtung der Symmetrie zwischen den durch Anwendung der beiden Methoden des kursorischen Substituierens gewonnenen Endgleichungen.

Die Symmetriebetrachtungen, die wir zwischen den aus dem linksseitigen bez. rechtsseitigen Substituieren resultierenden Gleichungen angestellt haben, lassen sich auf die aus dem vorbez. rücklaufenden Substituieren resultierenden Gleichungen übertragen. Der rechtsstehende Ausdruck der Gleichung

$$S^{k+1}\psi_1^{l-1}[S^{k-1}\psi_{k\sigma(k-1)}^{l-1}\dots S^{k-1}\psi_{(\sigma-1)(k-1)+2}^{l-1}S^{k-1}\psi_{(\sigma-1)(k-1)+1}^{l-2}S^{k-1}\psi_{(\sigma-1)(k-1)}^{l-1}\dots$$

(74a) $\dots S^{k-1}\psi_{2(k-1)+2}^{l-1}S^{k-1}\psi_{2(k-1)+1}^{l-2}S^{k-1}\psi_{2(k-1)}^{l-1}\dots S^{k-1}\psi_{k-1+2}^{l-1}S^{k-1}\psi_{k-1+1}^{l-2}S^{k-1}\psi_{k-1}^{l-1}\dots$

$$\dots S^{k-1}\psi_2^{l-1}S^{k-1}\psi_1^{l-2}]^{\nu}S^{k-1}T^{l}S^{k-1}T^{(\nu\sigma+1)l}$$

geht über in den entsprechenden Ausdruck der Gleichung

$$S^{(\nu\tau+1)k}T^{l-1}S^{k}T^{l-1}[\varphi_1^{k-2}T^{l-1}\varphi_2^{k-1}T^{l-1}\dots\varphi_{l-1}^{k-1}T^{l-1}\varphi_{(l-1)+1}^{k-2}T^{l-1}\varphi_{(l-1)+2}^{k-1}$$

(49a) $\dots\varphi_{2(l-1)}^{k-1}T^{l-1}\varphi_{2(l-1)+1}^{k-2}T^{l-1}\varphi_{2(l-1)+2}^{k-1}T^{l-1}\dots$

$$\dots\varphi_{(\tau-1)(l-1)}^{k-1}T^{l-1}\varphi_{(\tau-1)(l-1)+1}^{k-2}T^{l-1}\varphi_{(\tau-1)(l-1)+2}^{k-1}\dots\varphi_{\tau(l-1)}^{k-1}T^{l-1}]^{\nu}\varphi_1^{k-1}T^{l+1},$$

wenn wir folgende Überführungen vornehmen

$$
\begin{array}{c}
k \rightleftarrows l \\
\sigma \rightleftarrows \tau \\
S^k \rightleftarrows T^l \\
S^{k-1} \rightleftarrows T^{l-1} \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
S \rightleftarrows T \\
\varphi_1^k \rightleftarrows \psi_1^l \\
\varphi_1^{k-1} \rightleftarrows \psi_1^{l-1} \\
\varphi_1 \rightleftarrows \psi_1 \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot
\end{array}
$$

wobei die Reihe $S^k, S^{k-1} \ldots S$ übergeht in die Reihe $T^l, T^{l-1} \ldots T$, ebenso die Reihe $\varphi_1^k, \varphi_1^{k-1} \ldots \varphi_1$ in $\psi_1^l, \psi_1^{l-1} \ldots \psi_1$ usf. und die erhaltenen Teiloperationen in umgekehrter Reihenfolge zusammensetzen. In derselben Weise erhalten wir aus dem Ausdruck (49a) den Ausdruck (74a). Aus dem Ausdruck (63a) ergibt sich in analoger Weise der Ausdruck (38b), wenn wir die entsprechenden Überführungen vornehmen und die erhaltenen Teiloperationen in umgekehrter Reihenfolge zusammensetzen. Dabei müssen wir allerdings vor Ausführung der Überführungen genau so wie bei den durch Anwendung der beiden Methoden des statarischen Substituierens auf die gleiche Gruppe erhaltenen Ausdrücken den Ausdruck (63a) in die Form des allgemeinen Ausdruckes (74a) bringen. Die Überführung des Ausdruckes (38b) in den Ausdruck (63a) erfolgt in analoger Weise.

§ 15. Anwendung der Methoden des statarischen und kursorischen Substituierens auf die der definierenden Relation $TS = S^k T^l$ analogen Gleichungen: $T\varphi_1 = \varphi_1^k T^l \ldots \psi_1 S = S^k \psi_1^l \ldots$

Aus den Gleichungen (38b), (49a), (63a) und (74a) folgt, daß die Methoden des kursorischen Substituierens ähnlich wie die Methoden des statarischen Substituierens auf gewisse zusammengesetzte Operationen führen, die in den resultierenden Gleichungen als Basen von Potenz-Operationen auftreten. Wir

bezeichnen diese zusammengesetzten Ausdrücke als Zentraloperationen und führen folgende Abkürzungen ein:

$C^{s,\,l}_{S',\,T'}$ = Zentraloperation der durch Anwendung der Methode des statarischen linksseitigen Substituierens auf die durch die Gleichungen $T'S' = S'^3 T'^2$, $S'^{\sigma'} = 1$, $T'^{\tau'} = 1$ definierte Gruppe unter Zugrundelegung der Ausgangsoperation $S'^3 T'^2 S'^3 T'^2$ erhaltenen Gleichung (2).

$C^{s,\,l}_{S',\,T'} = S' T'^2$

$C^{s,\,r}_{S',\,T'}$ = Zentraloperation der durch Anwendung der Methode des statarischen rechtsseitigen Substituierens auf dieselbe Gruppe unter Zugrundelegung derselben Ausgangsoperation erhaltenen Gleichung (18).

$C^{s,\,r}_{S',\,T'} = S'^3 T' S'^3$

$C^{s,\,l}_{S,\,T}$ = Zentraloperation der durch Anwendung der Methode des statarischen linksseitigen Substituierens auf die durch die Gleichungen $TS = S^k T^l$, $S^\sigma = 1$, $T^\tau = 1$ definierte Gruppe unter Zugrundelegung der Ausgangsoperation $S^k T^l S^k T^l$ erhaltenen Gleichung (11).

$C^{s,\,l}_{S,\,T} = S^{k-2} T^l (S^{k-1} T^l)^{l-2}$

$C^{s,\,r}_{S,\,T}$ = Zentraloperation der Gleichung (19).

$C^{s,\,r}_{S,\,T} = (S^k T^{l-1})^{k-2} S^k T^{l-2}$

$C^{k,\,v}_{S',\,T'}$ = Zentraloperation der durch Anwendung der Methode des kursorischen vorlaufenden Substituierens auf die durch die Gleichungen $T'S' = S'^3 T'^2$, $S'^{\sigma'} = 1$, $T'^{\tau'} = 1$ definierte Gruppe unter Zngrundelegung des Ausdruckes $S'^3 T'^2 S'^3 T'^2$ als Ausgangsoperation erhaltenen Gleichung (38b).

$C^{k,\,v}_{S',\,T'} = \varphi'_1 T' \varphi'_2 T' \ldots \varphi'_{\tau'} T'$

$C^{k,\,r}_{S',\,T'}$ = Zentraloperation der Gleichung (63a)

$= S'^2 \psi'_{2\sigma'} S'^2 S'^2 \psi'_{2\sigma'-2} S'^2 \ldots S'^2 \psi'_2 S'^2$

$C^{k,\,v}_{S,\,T}$ = Zentraloperation der Gleichung (49a)

$= \varphi_1^{k-2} T^{l-1} \varphi_2^{k-1} T^{l-1} \ldots \varphi_{l-1}^{k-1} T^{l-1} \varphi_l^{k-2} T^{l-1} \varphi_{l+1}^{k-1} T^{l-1} \ldots S^{k-1}_{\tau(l-1)} T^{l-1}$

$C^{k,\,r}_{S,\,T}$ = Zentraloperation der Gleichung (74a)

$= S^{k-1} \psi^{l-1}_{\sigma(k-1)} \ldots S^{k-1} \psi^{l-1}_{(\sigma-1)\,(k-1)+2} S^{k-1} \psi^{l-2}_{(\sigma-1)\,(k-1)+1} S^{k-1} \psi^{l-1}_{(\sigma-1)\,(k-1)} \cdots$

$\ldots S^{k-1} \psi_2^{l-1} S^{k-1} \psi_1^{l-2}$

Die Beziehungen zwischen den Ordnungszahlen der Zentraloperationen $C^{k,v}_{S',T'}$ und $C^{k,r}_{S',T'}$ bez. $C^{k,v}_{S,T}$ und $C^{k,r}_{S,T}$ und den Ordnungszahlen der Operationen S' und T' bez. S und T ergeben sich durch dieselben Betrachtungen, die wir früher bei den entsprechenden durch statarisches Substituieren hergeleiteten Zentraloperationen angestellt haben, Es bestehen folgende Gesetzmäßigkeiten:

Ist a die Ordnungszahl der Operation S, so hat die Zentraloperation $C^{k,v}_{S,T}$ die Ordnung $\frac{a}{[a,k\tau]}$. Hat die Operation $C^{k,v}_{S,T}$ die Ordnung a, so ist a' die Ordnungszahl der Operation S, wobei a' der Relation $\frac{a'}{[a',k\tau]} = a$ gehorcht.

Ist b die Ordnungszahl der Operation T, so hat die Zentraloperation $C^{k,r}_{S,T}$ die Ordnung $\frac{b}{[b,l\sigma]}$. Hat die Operation $C^{k,r}_{S,T}$ die Ordnung b, so ist b' die Ordnungszahl der Operation T, wobei b' der Relation $\frac{b'}{[b',l\sigma]} = b$ gehorcht.

Die Ausdrücke $\varphi' \varphi'_1 \ldots \psi' \psi'_1 \ldots$ bez. $\varphi \varphi_1 \ldots \psi \psi_1 \ldots$ gehorchen bestimmten, der definierenden Relation $TS' = S'^3 T'^2$ bez. $TS = S^k T^l$ völlig analogen Gleichungen. Es liegt nun nahe, die Methoden des statarischen und kursorischen Substituierens, die bis jetzt auf den Ausdruck $S'^3 T'^2 S'^3 T'^2$ bez. allgemein $S^k T^l S^k T^l$ unter Ausführung der Substitutionen $T'S' = S'^3 T'^2$ bez. $TS = S^k T^l$ angewendet wurden, auf die mit Hilfe der Operationen $\varphi'_1, \varphi'_2 \ldots \psi'_1, \psi'_2 \ldots \varphi_1, \varphi_2 \ldots \psi_1, \psi_3 \ldots$ gebildeten analogen Ausdrücke z. B. $\varphi'^3_l T'^2 \varphi'^3_l T'^2$ unter Vornahme der entsprechenden Substitutionen z. B. $T'\varphi'_i = \varphi'^3_i T'^2$ anzuwenden. Die Methode des statarischen linksseitigen Substituierens unter Vornahme der Substitutionen $T\varphi'_i = \varphi'^3_i T'^2$ und unter Benützung des Ausdruckes $\varphi'^3_i T'^2 \varphi'^3_i T'^2$ als Ausgangsoperation ergibt nach $2n-1$ Substitutionen die Gleichung

$$T'\varphi'_i T'\varphi'_i = \varphi'^{3n}_i T'\varphi'^2_i (\varphi'_i T'^2) \varphi'^2_i T'^2.$$

Zwischen der Ordnungszahl der erhaltenen Zentraloperation

$$C^{s,l}_{\varphi'_i, T'} = \varphi'_i T'^2$$

und der Ordnungszahl der Operation φ'_i ergeben sich dieselben Beziehungen wie zwischen den Ordnungszahlen der Zentral-

operation $S'T'^2$ und der Operation S' der Gleichung (2). Die Ordnungszahlen der Operationen

$$\varphi', \varphi_1', \varphi_2' \ldots$$

sind aber, wie durch Anwendung des Hilfssatzes III des § 2 auf die Gleichungen (32), (32a), (32b), (32c) ohne weiteres hervorgeht, einander gleich, und infolgedessen haben auch die Zentraloperationen $S'T'^2$ und $\varphi_i'T'^2$ die gleiche Ordnung. Diese Betrachtung gilt für sämtliche Operationen $\varphi', \varphi_1' \ldots \psi', \psi_1' \ldots$ Wir erhalten also den Satz:

Satz XIX: Die Operationen $S'T'^2$, $\varphi_1'T'^2$, $\varphi_2'T'^2 \ldots \varphi_{\tau'-1}'T'^2$ und $S'T'^2$, $S'\psi_1'^2$, $S'\psi_2'^2 \ldots S'\psi_{\sigma-1}'^2$ der durch die Gleichungen $T'S' = S'^3T'^2$, $S'^{\sigma'} = 1$, $T'^{\tau'} = 1$ definierten Gruppe haben gleiche Ordnung.

Die Anwendung der Methode des rechtsseitigen statarischen Substituierens in der eben beschriebenen Weise auf die der definierenden Relation $T'S' = S'^3T'^2$ analogen Gleichungen $T\varphi_1' = \varphi_1'^3T'^2 \ldots \psi_1'S' = S'^3\psi_1'^2 \ldots$ ergibt folgende Zentraloperationen

$$\varphi_1'^3T'\varphi_1'^3,\ \varphi_2'^3T'\varphi_2'^3 \ldots S'^3\psi_1'S'^3,\ S'^3\psi_2'S'^3 \ldots,$$

die auf Grund analoger Betrachtungen wie oben die gleiche Ordnung haben wie $S'^3T'S'^3$. Es gilt also folgender Satz:

Satz XIXa: Die Operationen $S'^3T'S'^3$, $\varphi_1'^3T'\varphi_1'^3 \ldots S'^3\psi_1'S'^3$, $S'^3\psi_2'S'^3 \ldots$ der durch die Gleichungen $T'S' = S'^3T'^2$, $S'^{\sigma'} = 1$, $\varphi'^{\tau'} = 1$ definierten Gruppe haben gleiche Ordnung.

Analoge Sätze erhalten wir durch Anwendung der Methoden des statarischen Substituierens auf die der allgemeinen definierenden Relation $TS = S^kT^l$ analogen Gleichungen $T\varphi_1 = \varphi_1^kT^l \ldots \psi_1S = S^k\psi_1^l \ldots$ Die Anwendung der Methode des linksseitigen statarischen Substituierens ergibt folgenden Satz:

Satz XIXb: Die Operationen $S^{k-2}T^l(S^{k-1}T^l)^{l-2}$, $\varphi_1^{k-2}T^l(\varphi_1^{k-1}T^l)^{l-2} \ldots S^{k-2}\psi_1^l(S^{k-1}\psi_1^l)^{l-2} \ldots$ der durch die Gleichungen $TS = S^kT^l$, $S^\sigma = 1$, $T^\tau = 1$ definierten Gruppe haben gleiche Ordnung.

Die Anwendung der Methode des rechtsseitigen statarischen Substituierens ergibt folgenden Satz:

Satz XIXc: Die Operationen $(S^k T^{l-1})^{k-2} S^k T^{l-2}$, $(\varphi_1^k T^{l-1})^{k-2} \varphi_1^k T^{l-1}$ . . . $(S^k \psi_1^{l-1})^{k-2} S \psi_1^{l-1}$ . . . der durch die Gleichungen $TS = S^k T^l$, $S^\sigma = 1$, $T^\tau = 1$ definierten Gruppe haben gleiche Ordnung.

Durch Anwendung der Methoden des kursorischen Substituierens in der angegebenen Weise auf die der definierenden Relation $T'S' = S'^3 T'^2$ bez. $TS = S^k T^l$ analogen Gleichungen erhalten wir ebenfalls den bisher gefundenen Zentraloperationen $C^{k,v}_{S',T'}$, $C^{k,r}_{S',T'}$, $C^{k,v}_{S,T}$ $C^{k,r}_{S,T}$ entsprechende Zentraloperationen $C^{k,v}_{\varphi_1',T'} \ldots C^{k,r}_{S',\psi_1'} \ldots C^{k,v}_{\varphi_1,T} \ldots C^{k,r}_{S,\psi_1} \ldots$ Die Anwendung des vorlaufenden Substituieruns auf die durch die Gleichungen $T'S' = S'^3 T'^2$, $S'^{\sigma'} = 1$, $T'^{\tau'} = 1$ definierte Gruppe unter Vornahme der Substitutionen $T' \varphi_1' = \varphi_1'^3 T'^2$ und unter Benützung des Ausdruckes $\varphi_1'^3 T'^2 \varphi_1'^3 T'^2$ als Ausgangsoperation führt wie man ohne weiteres sieht, zu der der Gleichung (38b) entsprechenden Endgleichung

$$T' \varphi_1' T' \varphi_1' = \varphi_1'^{3(\nu' \tau' + 1)} T' \varphi_1'^3 T' (\varphi_2' T' \varphi_3' T' \ldots \varphi_{\tau'+1} T')^\nu \varphi_2'^2 T'^3$$

in der

$$C^{k,v}_{\varphi_1',T'} = \varphi_2' T' \varphi_3' T' \ldots \varphi_{\tau'+1} T'$$

die Zentraloperation bedeutet.

Dieselbe Methode ergibt unter Vornahme der Substitutionen $T' \varphi_2' = \varphi_2'^3 T'^2$ und unter Benützung des entsprechenden Ausdruckes $\varphi_2'^3 T'^2 \varphi_2'^3 T'^2$ als Ausgangsoperation

$$C^{k,v}_{\varphi_2',T'} = \varphi_3' T' \varphi_4' T' \ldots \varphi_{\tau'+2}' T'.$$

Unter Vornahme der Substitution $T' \varphi_i' = \varphi_i'^3 T'^2$ und unter Beuützung des entsprechenden Ausdruckes $\varphi_i'^3 T'^2 \varphi_i'^3 T'^2$ als Ausgangsoperation erhalten wir

$$C^{k,v}_{\varphi_i',T'} = \varphi_{i+1}' T' \varphi_{i+2}' T' \ldots \varphi_{\tau'+2}' T'.$$

Man erkennt ohne weiteres, daß die Reihe

$$C^{k,v}_{S',T'}, \qquad C^{k,v}_{\varphi_1',T'}, \qquad C^{k,v}_{\varphi_2',T'} \ldots .$$

nur τ' verschiedene Werte hat, und daß

$$C^{k,v}_{\varphi'_\tau, T'} = C^{k,v}_{\varphi', T'}$$
$$C^{k,v}_{\varphi'_{\tau+1} T'} = C^{k,v}_{\varphi'_1, T'}$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

ist. Aus den zu diesen Zentraloperationen gehörigen Endgleichungen folgt, daß zwischen den Operationen $C^{k,v}_{\varphi'_1, T'}$, $C^{k,v}_{\varphi'_2, T'} \ldots$ und den Ordnungszahlen der entsprechenden Operationen φ'_1, $\varphi'_2 \ldots$ dieselben Beziehungen bestehen wie zwischen den Ordnungszahlen der Operationen $C^{k,v}_{S', T'}$, und S', und aus der Gleichheit der Ordnungszahlen der Operationen S, φ'_1, $\varphi'_2 \ldots$ folgt darum sofort:

Satz XX: Die Operationen $C^{k,v}_{S', T'}$, $C^{k,v}_{\varphi'_1, T'} \ldots$ der durch die Gleichungen $T'S' = S'^3 T'^2$, $S'^{\sigma'} = 1$, $T'^{\tau'} = 1$ definierten Gruppe haben gleiche Ordnung.

Vom substitutionstheoretischen Standpunkte stehen die Zentraloperationen $C^{k,v}_{S', T'}$, $C^{k,v}_{\varphi'_1, T'} \ldots$ in einfacher Beziehung zueinander. Sie lassen sich, wie man ohne weiteres sieht, durch Anwendung der Substitutionen der aus den Potenzen der Substitution

$$\begin{pmatrix} \varphi', & \varphi'_1, & \varphi'_2 \ldots & \varphi'^{\tau'-1} \\ \varphi'_1, & \varphi'_2, & \varphi'_3 \ldots & \varphi' \end{pmatrix}$$

gebildeten zyklischen Gruppe ineinander überführen.

Die Anwendung der Methode des rücklaufenden Substituierens auf die durch die Gleichungen $T'S' = S'^3 T'^2$, $S'^{\sigma} = 1$, $T'^{\tau'} = 1$ definierten Gruppe führt unter Vornahme der der definierenden Relation $T'S' = S'^3 T'^2$ entsprechenden Substitutionen $\psi'_1 S' = S'^3 \psi'^2_1 \ldots$ und unter Benützung der entsprechenden Ausdrücke $S'^3 \psi'^2_1 S'^3 \psi'^2_1 \ldots$ als Ausgangsoperationen zu den Gleichungen

$$\psi'_1 S' \psi'_1 S' = S'^4 \psi'_2 [S'^2 \psi'_{2\tau'+1} S'^2 S'^2 \psi'_{2\tau'-1} S'^2 \ldots$$
$$\ldots S'^2 \psi'_3 S'^2]^\nu S'^2 \psi'^2_1 S'^2 \psi'^{2(\nu\tau'+1)}_1$$
$$\psi'_2 S' \psi'_2 S' = S'^4 \psi'_3 [S'^2 \psi'_{2\tau'+2} S'^2 S'^2 \psi'_{2\tau'} S'^2 \ldots$$
$$\ldots S'^2 \psi'_4 S'^2]^\nu S'^2 \psi'^2_2 S'^2 \psi'^{2(\nu\tau'+1)}_2$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

Satz XXa: Die Zentraloperationen

$$C^{k,r}_{S',\varphi'_1} = S'^2\psi'_{2\tau'+1}S'^2S'^2\psi'_{2\tau'-1}S'^2 \ldots S'^2\psi'_3S'^2$$
$$C^{k,r}_{S',\varphi'_2} = S'^2\psi'_{2\tau'+2}S'^2S'^2\psi'_{2\tau'}S'^2 \ldots\ldots S'^2\psi'_4S'^2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

haben auf Grund analoger Schlußfolgerungen wie früher dieselbe Ordnung wie

$$C^{k,r}_{S',T'} = S'^2\psi'_{2\tau'}S'^2S'^2\psi'_{2\tau'-2}S'^2 \ldots S'^2\psi'_2S'^2.$$

Ähnlich wie die Zentraloperationen $C^{k,v}_{S',T'}$, $C^{k,v}_{\varphi'_1,T'}$ ... lassen sich auch die eben gefundenen Zentraloperationen $C^{k,r}_{S',T'}$, $C^{k,r}_{S',\psi'_1}$ ... durch die Substitutionen der aus den Potenzen der Substitution

$$\begin{pmatrix}\psi', & \psi'_1 \ldots \psi'_{\sigma'-1}\\ \psi'_1, & \psi'_2 \ldots \psi'\end{pmatrix}$$

bestehenden zyklischen Gruppe ineinander überführen.

Die gefundenen Resultate übertragen wir ohne weiteres auf die durch die Gleichungen $TS = S^kT^l$, $S^\sigma = 1$, $T^l = 1$ definierte Gruppe.

Satz XXb: Die Methode des vorlaufenden Substituierens führt auf gewisse Gleichungen, die der Gleichung (49a) analog sind und deren Zentraloperationen

$$C^{k,v}_{\varphi_1,T} = \varphi_2^{k-2}T^{l-1}\varphi_3^{k-1}T^{l-1} \ldots \varphi_{l-1+1}^{k-1}T^{l-1}\varphi_{l-1+2}^{k-2}T^{l-1}\varphi_{l-1+3}^{k-1}T^{l-1} \ldots$$
$$\ldots \varphi_{\tau(l-1)+1}^{k-1}T^{l-1}$$

$$C^{k,v}_{\varphi_2,T} = \varphi_3^{k-2}T^{l-1}\varphi_4^{k-1}T^{l-1} \ldots \varphi_{l-1+2}^{k-1}T^{l-1}\varphi_{l-1+3}^{k-2}T^{l-1}\varphi_{l-1+4}^{k-1}T^{l-1} \ldots$$
$$\ldots \varphi_{\tau(l-1)+2}^{k-1}T^{l-1}$$

auf Grund analoger Schlußfolgerungen wie früher, die gleiche Ordnungszahl wie die Zentraloperation der Gleichung (49a)

$$C^{k,v}_{S,T} = \varphi_1^{k-2}T^{l-1}\varphi_2^{k-1}T^{l-1} \ldots \varphi_{l-1}^{k-1}T^{l-1}\varphi_{l-1+1}^{k-2}T^{l-1}\varphi_{l-1+2}^{k-1}T^{l-1} \ldots$$
$$\ldots \varphi_{\tau(l-1)}^{k-1}T^{l-1}$$

besitzen. Die einzelnen Zentraloperationen $C^{k,v}_{S,T}$, $C^{k,v}_{\varphi_1,T}\ldots$ lassen sich durch die Substitutionen der aus den Potenzen der Substitution

$$\begin{pmatrix} \varphi, & \varphi_1, & \varphi_2 \cdots \varphi_{\tau-1} \\ \varphi_1, & \varphi_2, & \varphi_3 \cdots \varphi \end{pmatrix}$$

gebildeten zyklischen Gruppe ineinander überführen.

Satz XXc: Die durch Anwendung der Methoden des rücklaufenden Substituierens sich ergebenden Zentraloperationen

$$\begin{aligned} C^{k,r}_{S,\psi_1} = {} & S^{k-1}\psi^{l-1}_{\sigma(k-1)+1}\cdots \\ & \ldots S^{k-1}\psi^{l-1}_{(\sigma-1)(k-1)+3}S^{k-1}\psi^{l-2}_{(\sigma-1)(k-1)+2}S^{k-1}\psi^{l-1}_{(\sigma-1)(k-1)+1}\cdots \\ & \ldots S^{k-1}\psi_3^{l-1}S^{k-1}\psi_2^{l-2} \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

haben ebenfalls gleiche Ordnung und lassen sich durch die Substitutionen der aus den Potenzen der Substitution

$$\begin{pmatrix} \psi, & \psi_1 \cdots \psi_{\sigma-1} \\ \psi_1, & \psi_2 \cdots \psi \end{pmatrix}$$

bestehenden zyklischen Gruppe ineinander überführen.

§ 16. Darstellung der allgemeinen Operation $S^{\alpha_1}T^{\beta_1}S^{\alpha_2}T^{\beta_2}\ldots$ als Produkt der Ausdrücke $\varphi, \varphi_1\ldots$ mit der Operation T, bez. der Operation S mit den Ausdrücken $\psi, \psi_1\ldots$ und Verwendung der Ausdrücke $\varphi, \varphi_1\ldots, \psi, \varphi_1\ldots$ zur Bildung von Isomorphismen.

Die Anwendung der beiden Methoden des kursorischen Substituierens auf die Operationen der durch die Gleichungen $TS = S^k T^l$, $S^\sigma = 1$, $T^\tau = 1$ definierten Gruppe liefert zwei verschiedene Darstellungen der Operationen der Gruppe. Als allgemeine Form der Operationen wählen wir

$$S^{\alpha_1}T^{\beta_1}S^{\alpha_2}T^{\beta_2}\ldots S^{\alpha_n}T^{\beta_n}. \tag{75}$$

Die erste Durchführung der Methode des vorlaufenden Substituierens an diesem Ausdruck (75), den wir mit D bezeichnen, ergibt den Ausdruck

$$S^{\alpha_1} T^{\beta_1 - 1} (S^k T^{l-1})^{\alpha_2} T^{\beta_2} (S^k T^{l-1})^{\alpha_3} T^{\beta_3} \ldots (S^k T^{l-1})^{\alpha_n} T^{\beta_n + 1},$$

der auf Grund der Definitionsgleichungen der Ausdrücke $\varphi, \varphi_1, \varphi_2 \ldots$ übergeht in die Form

$$S^{\alpha_1} T^{\beta_1 - 1} \varphi_1^{\alpha_2} T^{\beta_2} \varphi_1^{\alpha_3} T^{\beta_3} \ldots \varphi_1^{\alpha_n} T^{\beta_n + 1}.$$

Diesen Ausdruck legen wir der zweiten Durchführung zugrunde und erhalten den Ausdruck D_2

$$S^{\alpha_1} T^{\beta_1 - 2} (\varphi_1^k T^{l-1})^{\alpha_2} T^{\beta_2} (\varphi_1^k T^{l-1})^{\alpha_3} T^{\beta_3} \ldots (\varphi_1^k T^{l-1})^{\alpha_n} T^{\beta_n + 2},$$

den wir auf die Form

$$S^{\alpha_1} T^{\beta_1 - 2} \varphi_2^{\alpha_2} T^{\beta_2} \varphi_2^{\alpha_3} T^{\beta_3} \ldots \varphi_2^{\alpha_n} T^{\beta_n + 2}$$

bringen. Diese $\beta_1$te Durchführung, die den ersten Substitutionsgang beendet, führt zu dem Ausdruck D_{β_1}

$$S^{\alpha_1} \varphi_{\beta_1}^{\alpha_2} T^{\beta_2} \varphi_{\beta_1}^{\alpha_3} T^{\beta_3} \ldots \varphi_{\beta_1}^{\alpha_n} T^{\beta_n + \beta_1}.$$

Die $(\beta_1 + 1)$te Durchführung ergibt den Ausdruck $D_{\beta_1 + 1}$

$$S^{\alpha_1} \varphi_{\beta_1}^{\alpha_2} T^{\beta_2 - 1} \varphi_{\beta_1 + 1}^{\alpha_3} T^{\beta_3} \ldots \varphi_{\beta_1 + 1}^{\alpha_n} T^{\beta_n + \beta_1 + 1}.$$

Die $(\beta_1 + \beta_2)$te Durchführung, die den zweiten Snbstitutionsgang beendet, führt zu dem folgenden Ausdruck $D_{\beta_1 + \beta_2}$

$$S^{\alpha_1} \varphi_{\beta_1}^{\alpha_2} \varphi_{\beta_1 + \beta_2}^{\alpha_3} T^{\beta_3} \ldots \varphi_{\beta_1 + \beta_2}^{\alpha_n} T^{\beta_n + \beta_1 + \beta_2}.$$

Nach $n - 1$ Substitutionsgängen, die

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \ldots \beta_{n-1}$$

Durchführungen umfassen, erhalten wir den Ausdruck

$$\varphi^{\alpha_1} \varphi_{\beta_1}^{\alpha_2} \varphi_{\beta_1 + \beta_2}^{\alpha_3} \ldots \varphi_{\beta_1 + \ldots \beta_{n-1}}^{\alpha_n} T^{\beta_1 + \beta_2 + \ldots \beta_n}. \qquad (76)$$

Satz XXI: Die Operationen der durch die Gleichungen $TS = S^k T^l$, $S^\sigma = 1$, $T^\tau = 1$ definierten Gruppe lassen sich als Produkte der Ausdrücke φ, $\varphi_1 \ldots$, deren Exponenten

gleich den Exponenten der S-Operationen und deren Indizes sich additiv aus den Exponenten der T-Operationen aufbauen, mit der Operation von T, deren Exponent gleich der Summe der Exponenten der Operationen T ist, darstellen.

Die Überführung des Ausdruckes (75) in den Ausdruck (76) kann noch auf anderem Wege vorgenommen werden. Aus den Gleichungen (32) ergeben sich sofort die folgenden Gleichungen, indem wir für die zu transformierenden Ausdrücke die entsprechenden Werte aus vorhergehenden Gleichungen einsetzen. Wir erhalten:

$$\begin{aligned}
T\varphi_1 T^{-1} &= \varphi_2 \\
T^2\varphi_1 T^{-2} &= \varphi_3 \\
&\cdots\cdots \\
T^m\varphi_1 T^{-m} &= \varphi_{m+1} \\
T\varphi_2 T^{-1} &= \varphi_3 \\
T^2\varphi_2 T^{-2} &= \varphi_4 \\
T^3\varphi_2 T^{-3} &= \varphi_5 \\
&\cdots\cdots \\
T^m\varphi_2 T^{-m} &= \varphi_{m+2} \\
&\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Die allgemeine Gleichung dieser Art lautet

$$T^m\varphi_n T^{-m} = \varphi_{m+n} \tag{77}$$

und geht durch Potenzieren mit α über in die Form

$$T^m\varphi_n^\alpha T^{-m} = \varphi_{m+n}^\alpha. \tag{77a}$$

Zwecks Anwendung der Gleichung (77a) auf den allgemeinen Ausdruck (75) bringen wir diesen auf die Form

$$S^{\alpha_1} T^{\beta_1} S^{\alpha_2} T^{-\beta_1} T^{\beta_2} T^{\beta_1} S^{\alpha_3} T^{-\beta_1} T^{\beta_3} T^{\beta_1} \ldots S^{\alpha_n} T^{-\beta_1} T^{\beta_n+\beta_1}.$$

Die Anwendung der Gleichung (77a) ergibt

$$S^{\alpha_1}\varphi_{\beta_1}^{\alpha_2} T^{\beta_2}\varphi_{\beta_1}^{\alpha_3} T^{\beta_3} \ldots \varphi_{\beta_1}^{\alpha_n} T^{\beta_n+\beta_1}.$$

Diese Gleichung bringen wir auf die Form

$$S^{\alpha_1}\varphi_{\beta_1}^{\alpha_2} T^{\beta_2}\varphi_{\beta_1}^{\alpha_3} T^{-\beta_2} T^{\beta_3} T^{\beta_2}\varphi_{\beta_1}^{\alpha_4} T^{-\beta_2} T^{\beta_4} T^{\beta_2} \ldots \varphi_{\beta_1}^{\alpha_n} T^{-\beta_2} T^{\beta_n+\beta_1+\beta_2}.$$

Die Anwendung der Gleichung (77a) ergibt

$$S^{\alpha_1}\varphi_{\beta_1}^{\alpha_2}\varphi_{\beta_1+\beta_2}^{\alpha_3}T^{\beta_3}\varphi_{\beta_1+\beta_2}^{\alpha_4}T^{\beta_4}\ldots\varphi_{\beta_1+\beta_2}T^{-\beta_3}T^{\beta_n+\beta_1+\beta_2}.$$

Die Weiterführung dieser Methode führt zu dem Ausdruck (76)

$$\varphi^{\alpha_1}\psi_{\beta_1}^{\alpha_2}\varphi_{\beta_1+\beta_2}^{\alpha_3}+\ldots\varphi_{\beta_1+\ldots\beta_{n-1}}^{\alpha_n}T^{\beta_1+\ldots\beta_n}.$$

Die Operationen der durch die Gleichungen $TS=S^kT^l$, $S^\sigma=1$, $T^\tau=1$ definierten Gruppe lassen sich durch Anwendung der Methode des rücklaufenden Substitutierens noch auf eine andere Form bringen. Die erste Durchführung dieser Methode an dem Ausdruck (75)

$$S^{\alpha_1}T^{\beta_1}S^{\alpha_2}T^{\beta_2}\ldots S^{\alpha_n}T^{\beta_n}$$

ergibt den Ausdruck E_1

$$S^{\alpha_1+1}(S^{k-1}T^l)^{\beta_1}\ldots S^{\alpha_{n-2}}(S^{k-1}T^l)^{\beta_{n-2}}S^{\alpha_{n-1}}(S^{k-1}T^l)^{\beta_{n-1}}S^{\alpha_n-1}T^{\beta_n},$$

der auf Grund der Definitionsgleichungen der Ausdrücke ψ, ψ_1 ... übergeht in die Form

$$S^{\alpha_1+1}\psi_1^{\beta_1}\ldots S^{\alpha_{n-2}}\psi_1^{\beta_{n-2}}S^{\alpha_{n-1}}\psi_1^{\beta_{n-1}}S^{\alpha_n-1}T^{\beta_n}.$$

Diesen Ausdruck legen wir der zweiten Durchführung in der abgekürzten Form zugrunde und erhalten den Ausdruck E_2

$$S^{\alpha_1+2}(S^{k-1}\psi_1^l)^{\beta_1}\ldots S^{\alpha_{n-2}}(S^{k-1}\psi_1^l)^{\beta_{n-2}}S^{\alpha_{n-1}}(S^{k-1}\psi_1^l)^{\beta_{n-1}}S^{\alpha_n-2}T^{\beta_n},$$

der in die Form

$$S^{\alpha_1+2}\psi_2^{\beta_1}\ldots S^{\alpha_{n-2}}\psi_2^{\beta_{n-2}}S^{\alpha_{n-1}}\psi_2^{\beta_{n-1}}S^{\alpha_n-2}T^{\beta_n}$$

gebracht wird.

Die $\alpha_n$te Durchführung, die den ersten Substitutionsgang beendet, führt zu dem Ausdruck E_{α_n}

$$S^{\alpha_1+\alpha_n}\psi_{\alpha_n}^{\beta_1}\ldots S^{\alpha_{n-2}}\psi_{\alpha_n}^{\beta_{n-2}}S^{\alpha_{n-1}}\psi_{\alpha_n}^{\beta_{n-1}}T^{\beta_n}.$$

Die erste Durchführung des zweiten Substitutionsganges ergibt E_{α_n+1}

$$S^{\alpha_1+\alpha_n+1}\psi_{\alpha_n+1}^{\beta_1}\ldots S^{\alpha_{n-2}}\psi_{\alpha_n+1}^{\beta_{n-2}}S^{\alpha_{n-1}-1}\psi_{\alpha_n}^{\beta_{n-1}}T^{\beta_n}.$$

Die α_{n-1}te Durchführung des zweiten Substitutionsganges führt zu dem Ausdruck $E_{\alpha_n + \alpha_{n-1}}$

$$S^{\alpha_1 + \alpha_n + \alpha_{n-1}} \psi^{\beta_1}_{\alpha_n + \alpha_{n-1}} \dots S^{\alpha_{n-2}} \psi^{\beta_{n-2}}_{\alpha_n + \alpha_{n-1}} \psi^{\beta_{n-1}}_{\alpha_n} T^{\beta_n}.$$

Nach $n-1$ Substitutionsgängen, die zusammen $\alpha_n + \alpha_{n-1} \dots \alpha_1$ Durchführungen umfassen, erhalten wir den Ausdruck

$$(78) \qquad S^{\alpha_n + \alpha_{n-1} \dots \alpha_1} \psi^{\beta_1}_{\alpha_n + \alpha_{n-1} \dots \alpha_2} \psi^{\beta_2}_{\alpha_n + \dots \alpha_3} \dots \psi^{\beta_{n-2}}_{\alpha_n + \alpha_{n-1}} \psi^{\beta_{n-1}}_{\alpha_n} \psi^{\beta_n}.$$

Satz XXII: Die Operationen der durch die Gleichungen $TS = S^k T^l$, $S^\sigma = 1$, $T^\tau = 1$ definierten Gruppe lassen sich als Produkt der Operation S, deren Exponent gleich der Summe der Exponenten der Einzeloperationen S ist, mit den Ausdrücken ψ, $\psi_1 \dots$, deren Exponenten gleich den Exponenten der Einzeloperationen T und deren Indizes sich additiv aus den Exponenten der Einzeloperationen S zusammensetzen, darstellen.

Die Überführung der allgemeinen Operation (75) in die Form (78) kann wiederum noch auf anderm Wege geschehen. Aus den Gleichungen (57) ergeben sich sofort durch Einsetzen der entsprechenden Werte aus den vorhergehenden Gleichungen für die zu transformierenden Ausdrücke die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
S^{-1} \psi_1 S &= \psi_2 \\
S^{-2} \psi_1 S^2 &= \psi_3 \\
&\dots \\
S^{-m} \psi_1 S^m &= \psi_{m+1} \\
S^{-1} \psi_2 S &= \psi_3 \\
S^{-2} \psi_2 S^2 &= \psi_4 \\
&\dots \\
S^{-m} \psi_2 S^m &= \psi_{m+2}.
\end{aligned}$$

Die allgemeine Beziehung lautet

$$(79) \qquad S^{-m} \psi_n S^m = \psi_{m+n}$$

und geht durch Potenzieren über in

$$(79\,a) \qquad S^{-m} \psi^\beta_n S^m = \psi^\beta_{m+n}.$$

Zwecks Anwendung der Gleichung (79a) auf den Ausdruck (75) bringen wir diesen auf die Form

$$S^{\alpha_1+\alpha_n} S^{-\alpha_n} T^{\beta_1} S^{\alpha_n} \ldots S^{-\alpha_n} T^{\beta_{n-2}} S^{\alpha_n} S^{\alpha_{n-1}} S^{-\alpha_n} T^{\beta_{n-1}} S^{\alpha_n} T^{\beta_n}$$

und erhalten unter Benützung der Gleichung (79a)

$$S^{\alpha_1+\alpha_n} \psi^{\beta_1}_{\alpha_n} \ldots \psi^{\beta_{n-2}}_{\alpha_n} S^{\alpha_{n-1}} \psi^{\beta_{n-1}}_{\alpha_n} T^{\beta_n}.$$

Diesen Ausdruck formen wir ebenfalls um

$$S^{\alpha_1+\alpha_n+\alpha_{n-1}} S^{-\alpha_{n-1}} \psi^{\beta_1}_{\alpha_n} S^{\alpha_{n-1}} \ldots$$

$$\ldots S^{-\alpha_{n-1}} \psi^{\beta_{n-3}}_{\alpha_n} S^{\alpha_{n-1}} S^{\alpha_{n-2}} S^{-\alpha_{n-1}} \psi^{\beta_{n-2}}_{\alpha_n} S^{\alpha_{n-1}} \psi^{\beta_{n-1}}_{\alpha_n} T^{\beta_n}$$

und erhalten

$$S^{\alpha_1+\alpha_n+\alpha_{n-1}} \psi^{\beta_1}_{\alpha_n+\alpha_{n-1}} \ldots \psi^{\beta_{n-3}}_{\alpha_n+\alpha_{n-1}} S^{\alpha_{n-2}} \psi^{\beta_{n-2}}_{\alpha_n+\alpha_{n-1}} \psi^{\beta_{n-1}}_{\alpha_n} T^{\beta_n}.$$

Die Fortsetzung dieser Methode führt zu dem Ausdruck

$$S^{\alpha_n+\ldots\alpha_1} \psi^{\beta_1}_{\alpha_n+\ldots\alpha_2} \ldots \psi^{\beta_{n-2}}_{\alpha_n+\alpha_{n-1}} \psi^{\beta_{n-1}}_{\alpha_n} \psi^{\beta_n}. \tag{78}$$

Aus den beiden äquivalenten Ausdrücken (76) und (78) ergibt sich sofort, wenn wir

$$\begin{aligned} &\alpha_1 = \alpha_3 = \ldots = \alpha_n = 0 \qquad \alpha_2 \neq 0 \\ &\beta_2 = \beta_3 = \quad\; = \beta_n = 0 \qquad \beta_1 \neq 0 \end{aligned}$$

annehmen und

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \alpha \\ \beta_1 &= \beta \end{aligned}$$

setzen, die Beziehung

$$\varphi^{\alpha}_{\beta} T^{\beta} = S^{\alpha} \psi^{\beta}_{\alpha}. \tag{80}$$

Auf die Ausdrücke $\varphi, \varphi_1 \ldots \psi, \psi_1$ der durch die Gleichungen $TS = S^k T^l$, $S^\sigma = 1$, $T^\tau = 1$ definierten Gruppe lassen die Gleichungen (77a) und (79a) noch eine interessante Anwendung zu. Wir bilden die Substitution

$$\begin{pmatrix} \varphi, & \varphi_1, & \varphi_2 & \ldots \varphi_{\tau-1} \\ T\varphi T^{-1}, & T\varphi_1 T^{-1}, & T\varphi_2 T^{-1} \ldots & T\varphi_{\tau-1} T^{-1} \end{pmatrix}.$$

In dieser Substitution ordnen wir jedem Ausdruck $\varphi, \varphi_1 \ldots$ der ersten Reihe denjenigen der zweiten, der direkt unter ihm steht,

zu. Das Gesetz dieser Zuordnung ist ohne weiteres ersichtlich. Dem Produkt zweier Ausdrücke der oberen Reihe entspricht das Produkt der entsprechenden Ausdrücke der untern Reihe. Die Substitution stellt also einen Isomorphismus dar, und da auf Grund der Gleichungen (77a) die Ausdrücke der untern Reihe gleich den Ausdrücken der oberen Reihe sind, so stellt diese Substitution einen Isomorphismus der Reihe $\varphi, \varphi_1 \ldots$ in sich dar. Ebenso stellen auch die analogen Substitutionen

$$\begin{pmatrix} \varphi, & \varphi_1 & \cdots & \varphi_{\tau-1} \\ T^2\varphi T^{-2}, & T^2\varphi_1 T^{-2} & \ldots & T^2\varphi_{\tau-1} T^{-2} \end{pmatrix}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\begin{pmatrix} \varphi, & \varphi_1 & \cdots & \varphi_{\tau-1} \\ T^\tau\varphi T^{-\tau}, & T^\tau\varphi_1 T^{-\tau} & \ldots & T^\tau\varphi_{\tau-1} T^{-\tau} \end{pmatrix}$$

von denen die letztere die Identität bedeutet, Isomorphismen in sich der Reihe

$$\varphi, \varphi_1 \cdots \varphi_{\tau-1}$$

dar. Diese Isomorphismen bilden, wie man ohne weiteres sieht, eine zyklische Gruppe von der Ordnung τ.

Analoge Sätze gelten auch von den Operationen $\psi, \psi_1 \ldots \psi_{\sigma-1}$. Die Substitutionen

$$\begin{pmatrix} \psi, & \psi_1 & \cdots & \psi_{\sigma-1} \\ S^{-1}\psi S, & S^{-1}\psi_1 S & \ldots & S^{-1}\psi_{\sigma-1} S \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \psi, & \psi_1 & \cdots & \psi_{\sigma-1} \\ S^{-2}\psi S^2, & S^{-2}\psi_1 S^2 & \ldots & S^{-2}\psi_{\sigma-1} S^2 \end{pmatrix}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\begin{pmatrix} \psi, & \psi_1 & \cdots & \psi_{\sigma-1} \\ S^{-\sigma}\psi S^\sigma, & S^{-\sigma}\psi_1 S^\sigma & \ldots & S^{-\sigma}\psi_{\sigma-1} S^\sigma \end{pmatrix}$$

von denen die letztere die Identität bedeutet, stellen Isomorphismen in sich der Reihe der Operationen

$$\psi, \psi_1 \cdots \psi_{\sigma-1}$$

dar und bilden eine zyklische Gruppe von der Ordnung σ. Es ist ohne weiteres ersichtlich, daß diese hier betrachteten Substitutionen identisch sind mit den früher im Anschluß an die Zentraloperationen betrachteten Substitutionen.

§ 17. Betrachtung der Ausdrücke $\varphi, \varphi_1, \varphi_2 \ldots$ und $\psi, \psi_1, \psi_2 \ldots$ unter der Voraussetzung, daß die Komposition gewisser Potenzen der Operation T mit der Operation S bez. die Komposition gewisser Potenzen der Operation S mit der Operation T nach dem kommutativen Prinzip erfolgt.

Bisher ist die Komposition der Potenzen der Operation T mit der Operation S bez. der Potenzen der Operation S mit der Operation T als nicht kommutativ vorausgesetzt worden, und unter dieser Voraussetzung besitzen die beiden Reihen

$$\varphi, \varphi_1, \varphi_2 \ldots$$

$$\psi, \psi_1, \psi_2 \ldots$$

τ bez. σ verschiedene Werte, und die gleichen Werte wiederholen sich periodisch mit der Periode τ bez. σ. (Vergleiche die Sätze XVa, XVIa, XVIIb, XVIIIb.) Im folgenden wird die bisher gemachte Voraussetzung fallen gelassen, und es wird die Komposition der Potenz T^g, wobei g eine positive ganze Zahl bedeutet, die der Bedingung

$$1 < g < \tau$$

genügt, mit der Operation S als kommutativ vorausgesetzt. Es besteht also die Gleichung

$$T^g S = S T^g,$$

die durch rechtsseitige Multiplikation mit T^{-g} in die Form

$$T^g S T^{-g} = S \tag{81}$$

gebracht wird. Wir betrachten zunächst

Fall I: g ist Teiler von τ.

Wir setzen

$$\frac{\tau}{g} = u.$$

Aus der Gleichung (81) folgt sofort, indem für die Operation S der linken Seite der äquivalente Ausdruck $T^g S T^{-g}$ substituiert wird, die Gleichung

$$T^{2g} S T^{-2g} = S. \tag{82}$$

Substituieren wir in der Gleichung (82) für die Operation S der linken Seite wiederum den äquivalenten Ausdruck $T^g S T^{-g}$, so ergibt sich

(83) $$T^{3g} S T^{-3g} = S.$$

Fahren wir in dieser Weise fort, so erhalten wir die weiteren Gleichungen

(84) $$T^{4g} S T^{-4g} = S,$$

. . . . . .

(85) $$T^{ug} S T^{-ug} = S,$$

von denen die letzte die Identität $S = S$ bedeutet. Aus den Gleichungen (82) bis (85) ergibt sich sofort der folgende Satz:

Satz XXIII: Ist die Komposition der Potenz T^g mit der Operation S kommutativ und ist g ein Teiler von τ, so ist die Komposition der Potenzen

$$T^{2g},\ T^{3g} \ldots T^{ug}$$

mit der Operation S ebenfalls kommutativ.

Aus den Gleichungen (81) bis (85) ergeben sich durch α-malige Multiplikation beider Seiten jeder Gleichung mit sich selbst, wobei α eine beliebige ganze Zahl bedeutet, die Gleichungen

(81a) $$T^g S^\alpha T^{-g} = S^\alpha$$

(82a) $$T^{2g} S^\alpha T^{-2g} = S^\alpha$$

(83a) $$T^{3g} S^\alpha T^{-3g} = S^\alpha$$

. . . . . .

(85a) $$T^{ug} S^\alpha T^{-ug} = S^\alpha$$

die zu folgender Erweiterung des Satzes XXIII führen:

Satz XXIIIa: Ist die Komposition der Potenz T^g mit der Operation S kommutativ und ist g ein Teiler von τ, so ist die Komposition der Potenzen

$$T^g,\ T^{2g},\ T^{3g} \ldots T^{ug}$$

mit jeder beliebigen Potenz von S kommutativ.

Auf Grund der Gleichungen (45), (45a) und (45b) des § 9 folgen aus den Gleichungen (81) bis (85) die Beziehungen

$$\varphi_g = \varphi \tag{81b}$$
$$\varphi_{2g} = \varphi \tag{82b}$$
$$\varphi_{3g} = \varphi \tag{83b}$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\varphi_{ug} = \varphi \tag{85b}$$

Durch Transformation beider Seiten dieser Gleichungen mit T^{-1}, $T^{-2} \ldots T^{-(g-1)}$ ergeben sich die Gleichungen

$$T\varphi_g T^{-1} = T\varphi T^{-1}$$
$$T^2\varphi_g T^{-2} = T^2\varphi T^{-2}$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$T\varphi_{2g} T^{-1} = T\varphi T^{-1}$$
$$T^2\varphi_{2g} T^{-2} = T^2\varphi T^{-2}$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

die auf Grund der Gleichungen (45), (45a) und (45b) übergehen in die Gleichungen:

$$\varphi_{g+1} = \varphi_1$$
$$\varphi_{g+2} = \varphi_2$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\varphi_{2g+1} = \varphi_1$$
$$\varphi_{2g+2} = \varphi_2$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

Wir erhalten also den Satz:

Satz XXIIIb: Ist die Komposition der Potenz T^g mit der Operation S kommutativ und ist g ein Teiler von τ, so hat die Reihe

$$\varphi, \varphi_1, \varphi_2 \ldots$$

nur g verschiedene Werte

$$\varphi, \varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_{g-1}$$

und die gleichen Werte wiederholen sich periodisch mit der Periode g.

Durch Potenzieren mit k und rechtsseitiges Multiplizieren mit T^{l-1} ergeben die Gleichungen (81) bis (85), indem wir

$$S^k T^{l-1} = \varphi_1$$

setzen, die folgenden Gleichungen

(81c) $$T^g \varphi_1 T^{-g} = \varphi_1$$

(82c) $$T^{2g} \varphi_1 T^{-2g} = \varphi_1$$

. . . . . .

(85c) $$T^{ug} \varphi_1 T^{-ug} = \varphi_1,$$

aus denen wir auf dieselbe Weise, indem wir

$$\varphi_1^k T^{l-1} = \varphi_2$$

setzen, die folgenden Gleichungen

(81d) $$T^g \varphi_2 T^{-g} = \varphi_2$$

(82d) $$T^{2g} \varphi_2 T^{-2g} = \varphi_2$$

. . . . . .

(85d) $$T^{ug} \varphi_2 T^{-ug} = \varphi_2$$

herleiten. Es gilt also folgender Satz:

Satz XXIIIc: Ist die Komposition der Potenz T^g mit der Operation S kommutativ und ist g ein Teiler von τ, so ist die Komposition der Potenzen

$$T^g,\ T^{2g} \ldots T^{ug}$$

mit den Operationen

$$\varphi,\ \varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_3 \cdots \varphi_{g-1}$$

und beliebigen Potenzen derselben ebenfalls kommutativ.

Daß unter den gemachten Voraussetzungen die Potenzen

$$T^g,\ T^{2g} \ldots T^{ug}$$

auch mit beliebigen Potenzen der Operationen

$$\varphi,\ \varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_3 \cdots \varphi_{g-1}$$

vertauschbar sind, folgt ebenfalls aus den Gleichungen (81c) bis (85d) durch Potenzieren derselben mit der beliebigen Zahl α.

Zur Herleitung der Gesetzmäßigkeiten, die sich unter den gemachten Voraussetzungen für die Reihe

$$\psi,\ \psi_1,\ \psi_2 \ldots$$

ergeben, gehen wir aus von den Gleichungen (81a) bis (85a), ersetzen α durch $-\alpha$ und multiplizieren rechtsseitig mit T^g und S^α, wodurch wir folgende Gleichungen erhalten

$$\begin{aligned} T^g &= S^{-\alpha} T^g S^\alpha \\ T^{2g} &= S^{-\alpha} T^{2g} S^\alpha \\ &\ldots\ldots\ldots \\ T^{ug} &= S^{-\alpha} T^{ug} S^\alpha. \end{aligned} \tag{86}$$

Lassen wir die beliebige Zahl α der Reihe nach die Zahlen

$$1,\ 2,\ 3 \ldots$$

durchlaufen, so gehen die Gleichungen (86) auf Grund der Gleichungen (68) von § 12 in die folgenden Gleichungen

$$\begin{aligned} \psi^g &= \psi_1^g \\ \psi^g &= \psi_2^g \\ &\ldots \\ \psi^{2g} &= \psi_1^{2g} \\ \psi^{2g} &= \psi_2^{2g} \\ &\ldots \\ \psi^{3g} &= \psi_1^{3g} \\ \psi^{3g} &= \psi_2^{3g} \\ &\ldots \end{aligned}$$

über. Wir erhalten also den Satz:

Satz XXIV: Ist die Komposition der Potenz T^g mit der Operation S kommutativ und ist g ein Teiler von τ, so bestehen die fortlaufenden Gleichungen

$$\begin{aligned} \psi^g = \psi_1^g = \psi_2^g = \ldots = \psi_{\sigma-1}^g \\ \psi^{2g} = \psi_1^{2g} = \psi_2^{2g} = \ldots = \psi_{\sigma-1}^{2g} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \psi^{ug} = \psi_1^{ug} = \psi_2^{ug} = \ldots = \psi_{\sigma-1}^{ug}. \end{aligned}$$

Die allgemeine Operation

$$S^{\alpha_1} T^{\beta_1} S^{\alpha_2} T^{\beta_2} \ldots S^{\alpha_n} T^{\beta_n},$$

in der n eine beliebige positive ganze Zahl bedeutet und die Exponenten $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \beta_1, \beta_2 \ldots$ ebenfalls beliebige positive ganze Zahlen bezeichnen mit den Einschränkungen

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 1, 2 \ldots \sigma \\ \beta_n &= 1, 2 \ldots \tau \\ \alpha_\nu &= 1, 2 \ldots \sigma - 1 \\ \text{für } \nu &= \quad 2 \ldots n \\ \beta_\nu &= 1, 2 \ldots \tau - 1 \\ \text{für } \nu &= 1, 2 \ldots n-1, \end{aligned}$$

läßt sich unter den gemachten Voraussetzungen auf eine etwas einfachere Form bringen. Wir bezeichnen mit $\bar{\beta}_\nu$ die zu β_ν modulo g kongruente Zahl, die der Bedingung

$$1 \leq \bar{\beta}_\nu < g$$

genügt, und erhalten für β_ν die Gleichung

$$\beta_\nu = \bar{\beta}_\nu + m_\nu g,$$

wobei m_ν eine positive ganze Zahl bedeutet, die zwischen den Zahlen

$$0 \leq m_\nu < u$$

liegt. Unter Benützung dieser jetzt eingeführten Bezeichnungen kann die allgemeine Operation in der Form

$$S^{\alpha_1} T^{\bar{\beta}_1 + m_1 g} S^{\alpha_2} T^{\bar{\beta}_2 + m_2 g} \ldots S^{\alpha_{n-1}} T^{\bar{\beta}_{n-1} + m_{n-1} g} S^{\alpha_n} T^{\beta_n}$$

geschrieben werden, die auf Grund der Gleichungen (81a) bis (85a) übergeht in

$$S^{\alpha_1} T^{\bar{\beta}_1} S^{\alpha_2} T^{\bar{\beta}_2} \ldots S^{\alpha_n} T^{\beta_n + m_1 g + \ldots m_{n-1} g}.$$

Es gilt also folgender Satz:

Satz XXV: Ist die Komposition der Potenz T^g mit der Operation S kommutativ und ist g ein Teiler von τ, so hat die allgemeine Operation der Gruppe die Form

$$S^{\alpha_1} T^{\bar{\beta}_1} S^{\alpha_2} T^{\bar{\beta}_2} \ldots S^{\alpha_n} T^{\beta_n}$$

wobei

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 1,\ 2,\ 3 \ldots \sigma \\ \beta_n &= 1,\ 2,\ 3 \ldots \tau \\ \alpha_\nu &= 1,\ 2,\ 3 \ldots \sigma - 1 \\ \text{für } \nu &= \quad 2,\ 3 \ldots n \\ \bar{\beta}_\nu &= 1,\ 2,\ 3 \ldots g - 1 \\ \text{für } \nu &= 1,\ 2,\ 3 \ldots n - 1 \end{aligned}$$

bedeuten.

Ist im besondern l ein ganzzahliges Vielfaches von g, so sind auf Grund des Satzes XXIIIa die Operationen T^l und S^k vertauschbar, sodaß die definierende Relation

$$TS = S^k T^l$$

auf die Form

$$TS = T^l S^k$$

gebracht werden kann. Die letzte Gleichung geht durch linksseitiges Multiplizieren mit T^{-1} und rechtsseitiges Multiplizieren mit S^{-1} in die Gleichung

$$1 = T^{l-1} S^{k-1} \tag{87}$$

über, aus der durch linksseitiges Multiplizieren mit $T^{-(l-1)}$ die Gleichung

$$T^{-(l-1)} = S^{k-1} \tag{87a}$$

folgt, die für ihr Bestehen, wie eine einfache Überlegung zeigt, die Bedingung

$$\nu_1 = \nu_2$$

erfordert, wobei ν_1 und ν_2 die kleinsten positiven ganzen Zahlen bedeuten, die den Kongruenzen

$$\begin{aligned} \nu_1 (k-1) &\equiv 0 \mod \sigma \\ \nu_2 (l-1) &\equiv 0 \mod \tau \end{aligned} \tag{88}$$

genügen. Durch Anwendung der Gleichung (87a) auf die Definitionsgleichungen der Ausdrücke φ, φ_1, $\varphi_2 \ldots \psi$, ψ_1, $\psi_2 \ldots$ ergeben sich die beiden fortlaufenden Gleichungen

$$\begin{aligned} \varphi = \varphi_1 = \varphi_2 = \ldots = \varphi_{\tau-1} &= S \\ \psi = \psi_1 = \psi_2 = \ldots = \psi_{\sigma-1} &= T. \end{aligned} \tag{89}$$

Die allgemeine Operation der Gruppe

$$S^{\alpha_1} T^{\beta_1} S^{\alpha_2} T^{\beta_2} \ldots S^{\alpha_n} T^{\beta_n}$$

geht für den Fall, daß l ein ganzzahliges Vielfaches von g ist, indem wir sämtliche Einzeloperationen T der Potenzoperationen T^{β_1}, $T^{\beta_2} \ldots T^{\beta_n}$ des Ausdruckes $S^{\alpha_1} T^{\beta_1} S^{\alpha_2} T^{\beta_2} \ldots S^{\alpha_n} T^{\beta_n}$ zur Bildung der durch $S^k T^l$ zu ersetzenden Operationen TS verwenden, in die Form

$$S^{\alpha_1} S(S^{k-1} T^l)^{\beta_1} S^{\alpha_2} (S^{k-1} T^l)^{\beta_2} \ldots S^{\alpha_{n-1}} (S^{k-1} T^l)^{\beta_{n-1}} S^{\alpha_n} T^{\beta_n}$$

über, die wir auf Grund der Vertauschbarkeit der Operation T^l mit beliebigen Potenzen von S in den Ausdruck

$$S^{\alpha} T^{\beta}$$

überführen. Dieses Resultat ergibt sich auch sofort aus den Ausdrücken (76) und (78) des vorigen Paragraphen, wenn wir in diesen unter Bezugnahme auf die Gleichungen (89) die Operationen

$$\varphi_{\beta_1} = \varphi_{\beta_1 + \beta_2} = \ldots = \varphi_{\beta_1 + \beta_2 + \ldots \beta_n} = S$$
$$\psi_{\alpha_n} = \psi_{\alpha_n + \alpha_{n-1}} = \ldots = \psi_{\alpha_n + \ldots \ldots \alpha_1} = T$$

gleichsetzen.

Spezialisieren wir die Betrachtungen noch weiter, indem wir die Zahlen $k-1$ und σ als relativ prim zu einander voraussetzen, so sind die Potenzen

$$S^{k-1},\ S^{2(k-1)} \ldots S^{\sigma},$$

sämtlich von einander verschieden und abgesehen von der Reihenfolge gleich den Potenzen

$$S,\ S^2,\ \ldots\ S^{\sigma(k-1)},$$

und unsre Gruppe reduziert sich auf die zyklische Gruppe, die aus den Potenzen der Operation T besteht. Setzen wir anstatt der beiden Zahlen $k-1$ und σ die beiden Zahlen $l-1$ und τ als relativ prim zu einander voraus, so sind die Potenzen

$$T^{l-1},\ T^{2(l-1)} \ldots T^{\tau(l-1)}$$

sämtlich voneinander verschieden und abgesehen von der Reihenfolge gleich den Potenzen

$$T,\ T^2 \ldots T^\tau,$$

und die Gruppe reduziert sich dann auf die zyklische Gruppe, die aus den Potenzen der Operation S besteht.

Wir kommen jetzt zur Betrachtung von

Fall II: g und τ sind teilerverwandt, g ist Nichteiler von τ.

Bezeichnen wir wie früher mit

$$[g, \tau] = t$$

den größten gemeinsamen Teiler von g und τ, so ist

$$t < g.$$

Weiter setzen wir

$$\frac{\tau}{t} = u'.$$

Analoge Betrachtungen wie im Fall I führen unter den jetzt gemachten Voraussetzungen zu den Gleichungen

$$T^g S T^{-g} = S$$
$$T^{2g} S T^{-2g} = S$$
$$\ldots\ldots$$
$$T^{u'g} S T^{-u'g} = S.$$

Nach zahlentheoretischen Sätzen sind im Fall II die Potenzen

$$T^g,\ T^{2g} \ldots T^{u'g},$$

abgesehen von der Reihenfolge, identisch mit den Potenzen

$$T^t,\ T^{2t} \ldots T^{u't}$$

und es ergibt sich der Satz:

Satz XXVI: Ist die Komposition der Potenz T^g mit der Operation S kommutativ und ist t der größte gemeinsame Teiler von g und τ, so ist die Komposition der Potenzen

$$T^t,\ T^{2t} \ldots T^{u't}$$

mit der Operation S und beliebigen Potenzen derselben ebenfalls kommutativ.

Aus den Gleichungen (90) folgen unter Benützung des Satzes XXVI die Gleichungen

$$\varphi_t = \varphi$$
$$\varphi_{2t} = \varphi$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\varphi_{u't} = \varphi ,$$

aus denen sich durch Transformieren mit T^{-1}, T^{-2} . . . die weiteren Relationen

$$\varphi_{t+1} = \varphi_1$$
$$\varphi_{t+2} = \varphi_2$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\varphi_{2t+1} = \varphi_1$$
$$\varphi_{2t+2} = \varphi_2$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

herleiten lassen, die zu dem Satz führen:

Satz XXVIa: Ist die Komposition der Potenz T^g mit der Operation S kommutativ und ist t der größte gemeinsame Teiler von g und τ, so hat die Reihe

$$\varphi, \varphi_1, \varphi_2 \cdots$$

nur t verschiedene Werte, und die gleichen Werte wiederholen sich periodisch mit der Periode t.

Auf Grund analoger Betrachtungen wie im Fall I ergibt sich weiter der Satz:

Satz XXVIb: Unter den im Fall II gemachten Voraussetzungen ist die Komposition der Potenzen

$$T^t, T^{2t}, T^{3t} \ldots T^{u't}$$

mit den Operationen

$$\varphi, \varphi_1, \varphi_2 \cdots \varphi_{\tau-1}$$

und beliebigen Potenzen derselben kommutativ.

Zur Herleitung der Gesetzmäßigkeiten der Reihe

$$\psi, \psi_1 \cdots$$

im Falle II gehen wir aus von den mit α potenzierten und in andrer Reihenfolge geschriebenen Gleichungen (90)

$$T^{t} S^{\alpha} T^{-t} = S^{\alpha}$$
$$T^{2t} S^{\alpha} T^{-2t} = S^{\alpha}$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$T^{u't} S^{\alpha} T^{-u't} = S^{\alpha},$$

die nach Vornahme ähnlicher Rechnungen wie früher zu dem Satz führen:

Satz XXVII: Im Fall II bestehen die folgenden fortlaufenden Gleichungen:

$$\psi^{t} = \psi_1^{t} = \psi_2^{t} = \ldots \psi_{\sigma-1}^{t}$$
$$\psi^{2t} = \psi_1^{2t} = \psi_2^{2t} = \ldots \psi_{\sigma-1}^{2t}$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\psi^{u't} = \psi_1^{u't} = \psi_2^{u't} = \ldots \psi_{\sigma-1}^{u't}.$$

Die allgemeine Operation der Gruppe

$$S^{\alpha_1} T^{\beta_1} S^{\alpha_2} T^{\beta_2} \ldots S^{\alpha_n} T^{\beta_n}$$

läßt sich im Falle II nach analogen Rechnungen wie im Fall I auf die Form bringen

$$S^{\alpha_1} T^{\overline{\overline{\beta}}_1} S^{\alpha_2} T^{\overline{\overline{\beta}}_2} \ldots S^{\alpha_n} T^{\beta_n},$$

wobei

$$\alpha_1 = 1, \; 2 \ldots \sigma$$
$$\beta_n = 1, \; 2 \ldots \tau$$
$$\alpha_\nu = 1, \; 2 \ldots \sigma - 1$$
$$\text{für } \nu = 2, \; 3 \ldots n$$
$$\overline{\overline{\beta}}_\nu = 1, \; 2 \ldots t - 1$$
$$\text{für } \nu = 1, \; 2 \ldots n - 1$$

bedeuten.

Auch die weiteren speziellen Betrachtungen, die wir im Fall I angestellt haben, lassen sich im Fall II durchführen, und wir erhalten die entsprechenden Ergebnisse wie im Fall I. Es ist nur g durch t zu ersetzen.

Wir kommen nun zur Betrachtung von

Fall III: g und τ sind relativ prim.

In diesem Fall sind die Potenzen

$$T^g,\ T^{2g} \ldots T^{\tau g},$$

wie aus zahlentheoretischen Betrachtungen folgt, sämtlich voneinander verschieden und abgesehen von der Reihenfolge gleich den Potenzen

$$T,\ T^2,\ T^3 \ldots T^{\tau}.$$

Die Gleichungen (81) bis (85) erhalten im Fall III die Form

$$\begin{aligned} TST^{-1} &= S \\ T^2ST^{-2} &= S \\ &\cdots\cdots \\ T^{\tau}ST^{-\tau} &= S. \end{aligned} \tag{91}$$

Aus den Gleichungen (91) ergibt sich sofort der folgende Satz:

Satz XXVIII: Ist die Komposition der Potenz T^g mit der Operation S kommutativ und sind g und τ relativ prim, so sind sämtliche Potenzen von T

$$T,\ T^2,\ T^3 \ldots T^{\tau}$$

mit der Operation S und beliebigen Potenzen derselben vertauschbar. Die Reihe der Ausdrücke

$$\varphi,\ \varphi_1,\ \varphi_2 \cdots \varphi_{\tau-1}$$

hat nur einen Wert, d. h. es besteht die fortlaufende Gleichung

$$\varphi = \varphi_1 = \varphi_2 = \ldots = \varphi_{\tau-1}.$$

Aus den Gleichungen (91) ergeben sich durch Potenzieren mit der beliebigen ganzen Zahl $-\alpha$ und rechtsseitiges Multiplizieren mit T und S^{α} die Gleichungen

$$\begin{aligned} T &= S^{-\alpha}TS^{\alpha} \\ T^2 &= S^{-\alpha}T^2S^{\alpha} \\ &\cdots\cdots \\ T^{\tau} &= S^{-\alpha}T^{\tau}S^{\alpha}, \end{aligned} \tag{91a}$$

die, indem wir für α der Reihe nach die Zahlen

$$\alpha = 1,\ 2,\ 3 \ldots \sigma$$

einsetzen, zu der fortlaufenden Gleichung

$$\psi = \psi_1 = \psi_2 = \ldots = \psi_{\sigma-1}$$

führen.

Satz XXIX: Im Fall III sind die sämtlichen Ausdrücke ψ, ψ_1, $\psi_2 \ldots$ gleich und zwar gleich der Operation T.

Aus den Gleichungen (91) folgt, daß im Fall III die Operationen T und S vertauschbar sind, sodaß die definierende Relation

$$TS = S^k T^l$$

in die Form gebracht werden kann

$$TS = T^l S^k,$$

aus der sich durch linksseitiges Multiplizieren mit T^{-l} und rechtsseitiges Multiplizieren mit S^{-1} die Relation

$$T^{-(l-1)} = S^{k-1}$$

ergibt, die, wie wir früher gesehen haben, die Bedingung

$$\nu_1 = \nu_2$$

erfordert, wobei ν_1 und ν_2 die kleinsten positiven ganzen Zahlen bezeichnen, die den Kongruenzen

$$\nu_1 (k-1) \equiv 0 \bmod \sigma$$

$$\nu_2 (l-1) \equiv 0 \bmod \tau$$

genügen. Die allgemeine Operation der Gruppe läßt sich durch dieselben Rechnungen, die wir angestellt haben, in die Form

$$S^\alpha T^\beta$$

bringen.

Setzen wir die Zahlen $k-1$ und σ bez. $l-1$ und τ als relativ prim zueinander voraus, so reduziert sich die Gruppe auf die zyklische Gruppe, die aus den Potenzen der Operation T bez. S besteht.

Einer besondern Betrachtung des Spezialfalles, daß l ein Vielfaches des kleinsten Exponenten der Potenzoperation von T ist, die mit S vertauschbar ist, bedarf es im Fall III nicht, da dieser kleinste Exponent im Fall III gleich 1 ist, sodaß in diesem Falle l durchgängig ein Vielfaches dieses kleinsten Exponenten ist.

Im zweiten Teile dieses Paragraphen setzen wir die Komposition der Potenzoperation S^h mit der Operation T als kommutativ voraus. Wir betrachten wiederum zunächst

Fall Ia: h ist Teiler von σ.

Wir setzen

$$\frac{\sigma}{h} = v.$$

Die Vertauschbarkeit von S^h und T läßt sich durch die Relation

$$S^{-h} T S^h = T \tag{92}$$

ausdrücken, aus der sich durch ähnliche Rechnungen wie früher die Gleichungen

$$\begin{aligned} S^{-2h} T S^{2h} &= T \\ S^{-3h} T S^{3h} &= T \\ &\cdots \\ S^{-vh} T S^{vh} &= T \end{aligned} \tag{92a}$$

ergeben, die zu dem Satz führen:

Satz XXX: Ist die Komposition der Potenzoperation S^h mit der Operation T kommutativ und ist h ein Teiler von σ, so ist die Komposition der Potenzen

$$S^h,\ S^{2h},\ S^{3h} \ldots S^{vh}$$

mit der Operation T und beliebigen Potenzen derselben ebenfalls kommutativ.

Unter Bezugnahme auf die Gleichungen (68) gehen die Gleichungen (92) und (92a) in die Gleichungen

$$\begin{aligned} \psi_h &= \psi \\ \psi_{2h} &= \psi \\ \psi_{3h} &= \psi \\ &\cdots \\ \psi_{vh} &= \psi \end{aligned} \tag{92b}$$

über, die durch Transformieren mit S zu den weiteren Gleichungen

$$\begin{aligned} \psi_{h+1} &= \psi_1 \\ \psi_{h+2} &= \psi_2 \\ &\cdots\cdots \\ \psi_{2h+1} &= \psi_1 \\ \psi_{2h+2} &= \psi_2 \\ &\cdots\cdots \end{aligned} \tag{92c}$$

führen. Es gilt also der Satz:

Satz XXXa: Ist die Komposition der Potenz S^h mit der Operation T kommutativ und ist h ein Teiler von σ, so hat die Reihe

$$\psi,\ \psi_1,\ \psi_2 \cdots$$

nur h verschiedene Werte, und die gleichen Werte wiederholen sich periodisch mit der Periode h.

Durch Potenzieren mit l und nachheriges linksseitiges Multiplizieren mit S^{k-1} ergibt sich aus der Gleichung (92) die Gleichung

$$S^{-h} S^{k-1} T^l S^h = S^{k-1} T^l,$$

die wir in der Form

$$S^{-h} \psi_1 S^h = \psi_1$$

schreiben. Potenzieren wir diese Gleichung ebenfalls mit l und multiplizieren links mit S^{k-1}, so erhalten wir die weitere Gleichung

$$S^{-h} \psi_2 S^h = \psi_2 .$$

Fahren wir in dieser Weise fort, so ergeben sich die Gleichungen

$$\begin{aligned} S^{-h} \psi_3 S^h &= \psi_3 \\ &\cdots\cdots \\ S^{-2h} \psi_1 S^{2h} &= \psi_1 \\ S^{-2h} \psi_2 S^{2h} &= \psi_2 \\ &\cdots\cdots \end{aligned}$$

Es gilt also der Satz:

Satz XXXb: Ist die Komposition der Potenzoperation S^h mit der Operation T kommutativ und ist h ein Teiler von σ, so ist die Komposition der Glieder der Reihe

$$S^h,\ S^{2h} \ldots S^{vh}$$

mit den Gliedern der Reihe

$$\psi,\ \psi_1 \cdots \psi_{\sigma-1}$$

und beliebigen Potenzen derselben kommutativ.

Zur Herleitung der Beziehungen für die Reihe

$$\varphi,\ \varphi_1,\ \varphi_2 \cdots \varphi_{\tau-1}$$

gehen wir von den Gleichungen (92) und (92a) aus und potenzieren diese mit $-\alpha$, wodurch wir die Gleichungen

$$\begin{aligned} S^{-h}T^{-\alpha}S^{h} &= T^{-\alpha} \\ S^{-2h}T^{-\alpha}S^{2h} &= T^{-\alpha} \\ &\cdots\cdots\cdots \\ S^{-vh}T^{-\alpha}S^{vh} &= T^{-\alpha} \end{aligned} \tag{93}$$

erhalten, die durch linksseitiges Multiplizieren mit S^h und T^α in die Gleichungen

$$\begin{aligned} S^{h} &= T^{\alpha}S^{h}T^{-\alpha} \\ S^{2h} &= T^{\alpha}S^{2h}T^{-\alpha} \\ &\cdots\cdots\cdots \\ S^{vh} &= T^{\alpha}S^{vh}T^{-\alpha} \end{aligned} \tag{93a}$$

übergehen. In diesen Gleichungen setzen wir für α der Reihe nach die Zahlen

$$1,\ 2,\ 3 \ldots \sigma$$

und finden auf diese Weise die Relationen

$$\begin{aligned} \varphi^{h} = \varphi_1^{h} = \varphi_2^{h} &= \ldots = \varphi_{\tau-1}^{h} \\ \varphi^{2h} = \varphi_1^{2h} = \varphi_2^{2h} &= \ldots = \varphi_{\tau-1}^{2h} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varphi^{vh} = \varphi_1^{vh} = \varphi_2^{vh} &= \ldots = \varphi_{\tau-1}^{vh}. \end{aligned} \tag{93b}$$

Die allgemeine Operation der Gruppe

$$S^{\alpha_1}T^{\beta_1}S^{\alpha_2}T^{\beta_2} \ldots S^{\alpha_n}T^{\beta_n}$$

läßt sich unter Vornahme entsprechender Betrachtungen wie im Fall I auf die Form

$$S^{\alpha_1}T^{\beta_1}S^{\bar{\alpha}_2}T^{\beta_2} \ldots S^{\bar{\alpha}_n}T^{\beta_n}$$

bringen, wobei

$$\alpha_1 = 1,\ 2,\ 3 \ldots \sigma$$
$$\bar{\alpha}_\nu = 1,\ 2,\ 3 \ldots h-1$$
$$\text{für } \nu = 2,\ 3,\ 4 \ldots n$$
$$\beta_\nu = 1,\ 2,\ 3 \ldots \tau - 1$$
$$\text{für } \nu = 1,\ 2,\ 3 \ldots n-1$$
$$\beta_n = 1,\ 2,\ 3 \ldots \tau$$

bedeuten.

Nehmen wir analog wie im ersten Teile dieses Paragraphen die Zahl k als Vielfaches von h an, sodaß die beiden Potenzoperationen S^k und T^l der definierenden Relation $TS = S^k T^l$ miteinander vertauschbar sind, so erhalten wir aus der definierenden Relation $TS = S^k T^l$ die Gleichung

$$T^{-(l-1)} = S^{k-1}, \tag{87a}$$

die für ihr Bestehen die Bedingung

$$\nu_1 = \nu_2$$

erfordert, wobei ν_1 und ν_2 genau wie früher die kleinsten positiven ganzen Zahlen bedeuten, die den Kongruenzen

$$\nu_1 (k-1) \equiv 0 \bmod \sigma$$
$$\nu_2 (l-1) \equiv 0 \bmod \tau$$

genügen. Aus der Gleichung (87a) ergeben sich die beiden fortlaufenden Gleichungen

$$\varphi = \varphi_1 = \ldots = \varphi_{\tau-1}$$
$$\psi = \psi_1 = \ldots = \psi_{\sigma-1}.$$

Die allgemeine Operation der Gruppe läßt sich unter den gemachten Voraussetzungen in die Form

$$S^\alpha T^\beta$$

bringen.

Spezialisieren wir die Betrachtungen weiter, indem wir die Zahlen $k-1$ und σ bez. $l-1$ und τ als relativ prim zueinander voraussetzen, so reduziert sich die Gruppe auf die zyklische, die aus den Potenzen von T bez. S besteht.

Wir kommen jetzt zum

Fall IIa: h und σ sind teilerverwandt.

Wir setzen

$$[h, \sigma] = t_1$$
$$\frac{\sigma}{t_1} = v' .$$

Wir erhalten die im Falle IIa geltenden Gleichungen und Sät aus den entsprechenden Gleichungen und Sätzen des Falles I wenn wir in diesen h durch t_1 und v durch v' ersetzen.

Fall IIIa: h und σ sind teilerfremd.

Es erübrigt sich, diesen Fall jetzt nochmals darzustelle

§ 18. Anwendung der durch die Methoden des statarisch und kursorischen Substituierens gewonnenen Resultate a die durch die Gleichungen $T'' S'' = S''^{\varkappa} T$, $S''^{\sigma''} = 1$, $T''^{\tau''} =$ bez. $T''' S''' = S'''^{\lambda} T'''$, $S'''^{\sigma'''} = 1$, $T'''^{\tau'''} = 1$ definierten Gruppe

Die Operationen φ'', φ_1'' ... ψ'', ψ_1'' ... bez. φ''', φ_1''' ... ψ''', ψ_1''' der durch die Gleichungen

$$T'' S'' = S''^{\varkappa} T'', \quad S''^{\sigma''} = 1, \quad T''^{\tau''} = 1 \tag{94}$$

$$T''' S''' = S'''^{\lambda} T'''^{\lambda}, \quad S'''^{\sigma'''} = 1, \quad T'''^{\tau'''} = 1 \tag{95}$$

definierten Gruppen nehmen sehr einfache Gestalt an. Für d Operationen

$$\varphi'', \ \varphi_1'', \ \varphi_2'' \ \ldots$$

der durch die Gleichungen (94) definierten Gruppe ergeben si auf Grund der Definitionsgleichungen (40) folgende Beziehung

$$\varphi'' = S''$$
$$\varphi_1'' = \varphi''^{\varkappa}$$
$$\varphi_2'' = \varphi_1''^{\varkappa} = \varphi''^{\varkappa^2}$$
$$\varphi_3'' = \varphi_2''^{\varkappa} = \varphi''^{\varkappa^3}$$
$$\ldots \ldots \ldots \ldots$$
$$\varphi_{\tau''}'' = \varphi_{\tau''-1}''^{\varkappa} = \varphi''^{\varkappa^{\tau''}} .$$

Die Anwendung der ersten Gleichung von (45c)

$$\varphi''_{\tau''} = \varphi''$$

führt zu der Gleichung

$$\varphi'' x^{\tau''} = \varphi'',$$

die für ihr Bestehen als notwendige und hinreichende Bedingung die Kongruenz

$$x^{\tau''} \equiv 1 \mod \sigma'' \tag{97}$$

fordert.

Die allgemeine Operation dieser Gruppe

$$S''^{\alpha_1} T''^{\beta_1} S''^{\alpha_2} T''^{\beta_2} \ldots S''^{\alpha_n} T''^{\beta_n}$$

geht über in die Form

$$S''^{\alpha_1 + \alpha_2 x^{\beta_1} + \alpha_3 x^{\beta_1 + \beta_2} + \ldots + \alpha_n x^{\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_{n-1}}} T^{\beta_1 + \ldots + \beta_n}.$$

Die durch die Gleichung (94) definierte Gruppe umfaßt also τ'' Operationen. Die Operationen

$$S'', S''^2 \ldots S''^{\sigma''}$$

bilden eine Untergruppe, die, wie durch Anwendung der Gleichungen (45b) und (96) folgt, in der Gruppe ausgezeichnet enthalten ist.

Für die Ausdrücke ψ''', ψ'''_1, ψ'''_2 ... der durch die Gleichungen (95) definierten Gruppe ergeben sich auf Grund der Definitionsgleichungen (64) folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned}
&\psi''' = T''' \\
&\psi'''_1 = \psi'''^{\lambda} \\
&\psi'''_2 = \psi'''^{\lambda}_1 = \psi'''^{\lambda^2} \\
&\psi'''_3 = \psi'''^{\lambda}_2 = \psi'''^{\lambda^3} \\
&\quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
&\psi'''_{\sigma'''} = \psi'''_{\sigma'''-1} = \psi'''^{\lambda^{\sigma'''}}.
\end{aligned} \tag{98}$$

Die Anwendung der ersten Gleichung von (69)

$$\psi'''_{\sigma'''} = \psi'''$$

führt zu der Gleichung

$$\psi'''\lambda^{\sigma'''} = \psi''',$$

die als notwendige und hinreichende Bedingung für ihr Bestehen die Kongruenz

(99) $$\lambda^{\sigma'''} \equiv 1 \mod \tau'''$$

verlangt.

Die allgemeine Operation

$$S'''^{\alpha_1} T'''^{\beta_1} S'''^{\alpha_2} T'''^{\beta_2} \ldots S'''^{\alpha_n} T'''^{\beta_n}$$

geht unter Anwendung des Ausdruckes (78) über in

$$S'''^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n} T'''^{\beta_1\lambda^{\alpha_n}+\ldots+\alpha_2+\beta_2\lambda^{\alpha_n}+\ldots+\alpha_3+\ldots+\beta_n\lambda^{\alpha_n}+\beta_n}.$$

Die durch die Gleichungen (95) definierte Gruppe umfaßt also $\sigma'''\tau'''$ Operationen. Die Operationen

$$T''', T'''^2, T'''^3 \ldots T'''^{\tau'''}$$

bilden eine Untergruppe, die, wie durch Anwendung der Gleichungen (68) und (98) hervorgeht, ausgezeichnet in der Gruppe enthalten ist.

Lebenslauf.

ev.luth. Kirch.

Ich, Martin Hermann Georg Felix Burkhardt, wurde am 9. Februar 1888 in Herwigsdorf bei Löbau als Sohn des verstorbenen Gutsbesitzers Felix Burkhardt geboren, besuchte von Ostern 1902 bis Ostern 1908 das Königliche Lehrer-Seminar zu Löbau und legte daselbst Ostern 1908 die Schulamtskandidatenprüfung ab. Ostern 1909 bestand ich die Reifeprüfung auf dem Königlichen Realgymnasium in Zittau, studierte hierauf an den Universitäten Jena und Leipzig Mathematik, Physik und Chemie und legte am 14. und 15. Januar 1914 an der Universität Leipzig die Prüfung für das Lehramt an höheren Schulen ab. Während meiner Studienzeit waren folgende Herren meine Lehrer: Barth, Des Coudres, Hantzsch, Haußner, Herglotz, Hölder, Jungmann, Le Blanc, Linck, Lehmann, Rohn, Volkelt, Wagner, Wiener, Winkelmann (†).

Allen diesen Herren spreche ich meinen Dank aus für die Anregungen, die ich während meines Studiums von ihnen empfing. Ganz besonders aber danke ich Herrn Geheimrat Hölder für die gütige Förderung bei der Abfassung der vorliegenden Arbeit.

Gaylord Bros.
Makers
Syracuse, N. Y.
PAT. JAN. 21, 1908

UNIVERSITY OF ILLINOIS-URBANA
512.22891U C001
UBER DIE GRUPPENTHEORETISCHE DEFINIEREND
3 0112 017038164